Angles et trigonométrie

A Le radian

Le radian est l'unité de mesure d'angle pour laquelle un angle plat a une mesure égale à π.

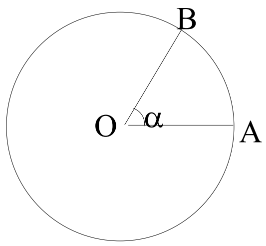
Conversion degrés-radians

Si la mesure d'un angle est a en dégré et α en radians, alors $\alpha = \dfrac{\pi a}{180}$.

Valeurs remarquables

degrés	0	30	45	60	90	180
radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π

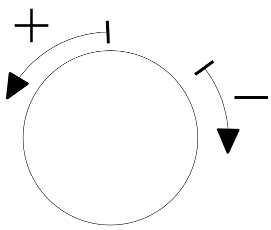
Propriété



Soient A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r tels que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ en radians soit α.
La longueur de l'arc AB est égale à αr.
Rappel : la longueur du cercle est $2\pi r$.

B Angles orientés

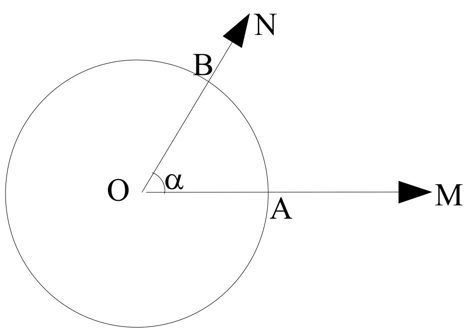
1. Orientation du plan



Sur un cercle, deux sens de parcours sont possibles :
- le sens positif (ou sens direct ou sens trigonométrique)
- le sens négatif (ou sens indirect ou sens des aiguilles d'une montre)

2. Mesures des angles orientés

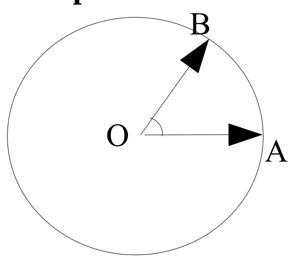
> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme un angle orienté.



Soient O, M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
Soit C le cercle de centre O et de rayon 1 qu'on appelle cercle trigonométrique.
La demi-droite $[OM)$ coupe C en A.
La demi-droite $[ON)$ coupe C en B.
On obtient une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.

Si la mesure en radians de $\widehat{AOB}$ est α, les mesures de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$ selon le sens de parcours pour aller de A à B, k étant un entier relatif.

Exemple



OAB est un triangle équilatéral.

La mesure de $\widehat{AOB}$ en radians est donc $\frac{\pi}{3}$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ admet comme mesures $\frac{\pi}{3}$, ou $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}-2\pi=\frac{-5\pi}{3}$, ...

L'angle orienté $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ admet comme mesures $\frac{-\pi}{3}$, ou $\frac{-\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}-2\pi=\frac{-7\pi}{3}$, ...

3. Mesure principale d'un angle orienté

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$; elle est appelée mesure principale de l'angle orienté.
Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, alors $|\alpha|$ est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemple

Trouver la mesure principale d'un angle dont l'une des mesures est $\frac{11\pi}{3}$.

Comme $\frac{11\pi}{3}>\pi$, on retire des multiples de 2π jusqu'à obtenir un résultat contenu dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

$$\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\times 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}+2\times 2\pi .$$

Comme $\frac{-\pi}{3}$ se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, il s'agit de la mesure principale de l'angle.

4. Propriétés des angles orientés

Angles et vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est égale à 0 ou à π.
Si cette mesure est 0, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, il existe un réel positif k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.
Si cette mesure est π, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés, il existe un réel négatif k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Relation de Chasles

> Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$.

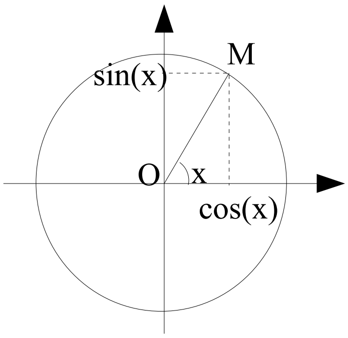
Conséquences :
$(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$; $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$; $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$; $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$.

C Sinus et cosinus d'un angle orienté

1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

On considère le cercle trigonométrique, cercle de centre O et de rayon 1.

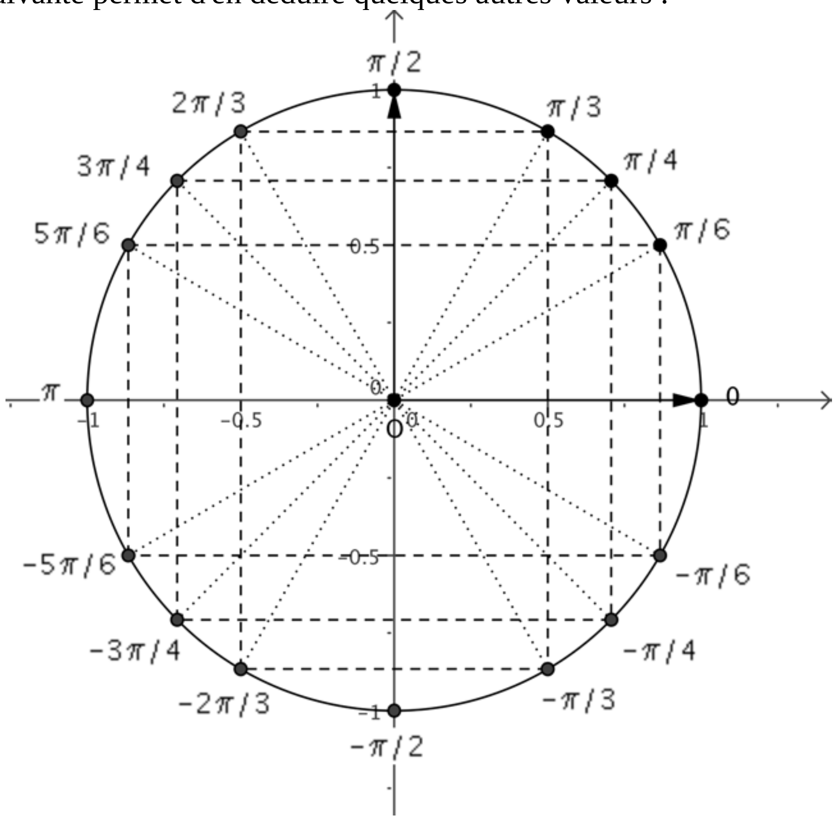


A tout réel x, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
On appelle alors **cos(*x*)** l'abscisse du point M et **sin(*x*)** l'ordonnée du point M.

2. Valeurs remarquables

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

La figure suivante permet d'en déduire quelques autres valeurs :

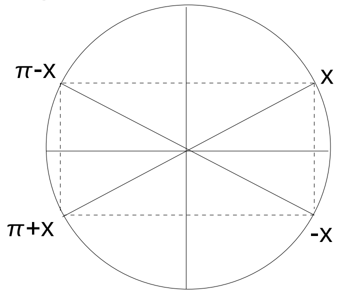


3. Propriétés

Pour tout réel x, on a les propriétés suivantes :

- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

La figure suivante permet de retrouver rapidement quelques autres formules :



a) $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

c) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

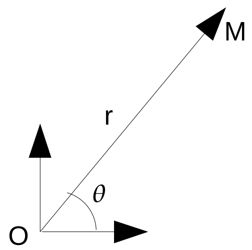
D'autre part,

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

D Coordonnées polaires d'un point

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Définition



Pour tout point M distinct de O, un couple (r, θ) tel que $OM = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ est un couple de coordonnées polaires de M.

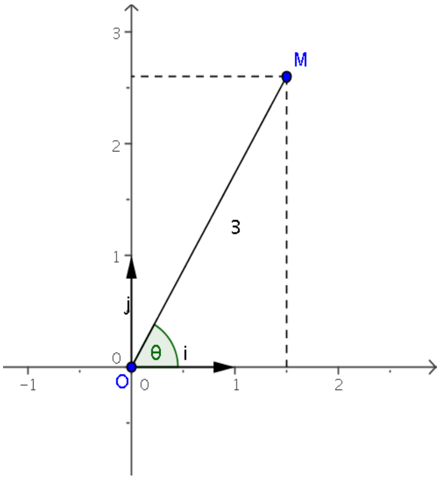
2. Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ).

On a les trois égalités suivantes :

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = r.\cos(\theta)$ ou $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$
- $y = r.\sin(\theta)$ ou $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$

Exemple 1



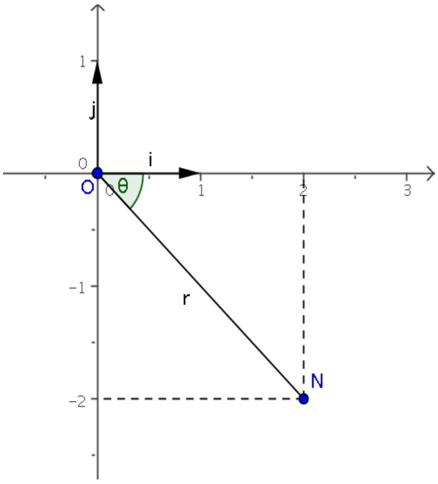
Le point M a $\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ comme coordonnées polaires.
Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

On a $x = 3 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

et $y = 3 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Les coordonnées cartésiennes de M sont donc $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Exemple 2



Le point N a (2, -2) comme coordonnées cartésiennes.
Quelles sont ses coordonnées polaires ?

On a $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ainsi $\cos(\theta) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin(\theta) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. On en déduit que $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$.

Les coordonnées polaires de N sont donc $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{-\pi}{4}\right)$.