SERIE DE MATHEMATIQUES N°1
CLASSE :QUATRIEME SECONDAIRE
SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES
THEME : NOMBRES COMPLEXES

LYCEE D'INDEPENDANCE
OUED ELLIL
ANNEE SCOLAIRE :2009-2010
PROF : BELLASSOUED MOHAMED

N B : les exercices sont extraits des bacs internationaux

Exercice 1 Q.C.M

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5i|^2=3$; b. $|z+2-5i|^2=3$; c. $|z-2+5i|=3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AD]$;
c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $5+4i$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G-3-2,5i|=\dfrac{5}{6}$; b. $z_G-(1+i)=\dfrac{1}{3}(4+3i)$; c. $z_G-(3+2,5i)=\dfrac{1}{3}(4+3i)$.

4. Soit $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z}+|z|=6+2i$. L'écriture algébrique de z est :

□ $\dfrac{8}{3}-2i$ □ $-\dfrac{8}{3}-2i$ □ $-\dfrac{8}{3}+2i$ □ $\dfrac{8}{3}+2i$

5. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+i|$ est la droite d'équation :

□ $y=x-1$ □ $y=-x$ □ $y=-x+1$ □ $y=x$

6. Soit n un entier naturel. Le nombre $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :

□ $3k+1$ □ $3k+2$ □ $3k$ □ $6k$

(avec k entier naturel)

7. Soit l'équation (E) : $z=\dfrac{6-z}{3-z}$, $z\in\mathbb{C}$. Une solution de (E) est :

□ $-2-\sqrt{2}i$ □ $2+\sqrt{2}i$ □ $1-i$ □ $1-i$

8. Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=\sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'affixe z_C du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$ est :

□ $-i$ □ $2i$ □ $\sqrt{3}+i$ □ $\sqrt{3}+2i$

9. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :

□ La droite d'équation $y=-x$
□ Le cercle de centre $I\,(1+i)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
□ La droite d'équation $y=x$
□ Le cercle de diamètre $[AB]$, A et B étant les points d'affixes respectives $z_A=-2$ et $z_B=2i$.

10. Soit $\theta\in\left]0\,;\pi\right[$, et z_1, z_2 les deux nombres complexes définis par : $\begin{cases} z_1=1-\cos\theta+i\sin\theta \\ z_2=-1+i \end{cases}$; on a :

a. $|z_1|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$. b. $\arg z_1=\dfrac{\pi-\theta}{2}$. c. $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

d. $z_1z_2=2\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$. e. $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Exercice 2

Linéariser le polynôme $P = \cos^2 5x \sin 3x$.

Exercice 3

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes $1, a, a^2, a^3, a^4$.
1. Vérifier que $a^5 = 1$.
2. Montrer que $IA = AB = BC = CD = DI$.
3. Vérifier que, pour tout z complexe : $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$.
4. En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.
5. Montrer que $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$.
6. En déduire que $(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = 0$.
7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
8. Calculer $(a+\overline{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
9. Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité 4 cm).

Exercice 4

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. On considère dans P les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = -(2+\sqrt{3}) + i$.

1. a. Calculer le module et un argument du nombre complexe $W = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

b. En déduire la nature du triangle ABC.

2. a. Écrire le nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.

b. Écrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{z_A}{z_B}$.

c. À l'aide des deux questions précédentes donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5

On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
a. Exprimer z^2 sous forme algébrique
b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.
c. En déduire z sous forme exponentielle

Exercice 6

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.
1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0\,;2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}$.

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.
b. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

Exercice 7

On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

Partie A - Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + i$; $b = -1 + 3i$; $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$. puis vérifier graphiquement que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Partie B - Étude du cas général

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si : $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$.

2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

2. a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans la **partie A**, démontrer que w est imaginaire pur.

2. b. Vérifier l'égalité $(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = w$: et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

2. c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.

3. a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

3. b. Prouver que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in Z$. (On admet de même que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in Z$).

3. c. Que représente le point H pour le triangle ABC

Exercice 8

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - 2z + 4 = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre. Donner le module et l'argument de chacun des nombres z_1, z_2, z_1^2, z_2^2. Ecrire sous forme algébrique z_1^2 et z_2^2.

2. On considère dans le plan les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$, $C(-2+2i\sqrt{3})$ et $D(-2-2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b. Montrer que les points O, A et D d'une part et les points O, B et C d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$?

c. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Montrer que les droites AB et AC sont perpendiculaires

Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans l'équation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; –1), (D ; +1), (B ; +1).

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$, $-i$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).
4. À tout point M d'affixe $z\neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{iz+10-2i}{z-2}$.

a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i.
Déterminer son rayon et tracer (C').
c. Pour tout nombre complexe $z\neq 2$, exprimer $|z'-i|$ en fonction de z.
d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z'-i|=2\sqrt{5}$.
e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

Exercice 11

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $z^3+2z^2-16=0$.

1. a. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera.
b. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
2. a. Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A=-2-2i$, $z_B=2$ et $z_D=-2+2i$.
b. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.
3. Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
a. Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F.
b. Placer les points E et F.
4. a. Vérifier que $\dfrac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$.
b. En déduire la nature du triangle AEF.
c. Soit I le milieu de $[EF]$. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

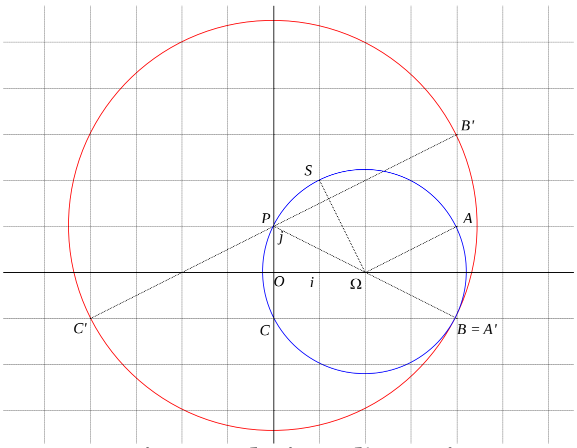


Figure relative a l'exercice 10

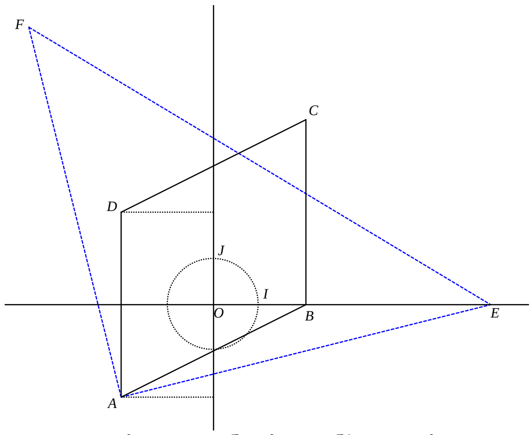


Figure relative a l'exercice 11

Exercice 12

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P\left(i\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = \left(z^2 + 3\right)Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice 13

a. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3. En déduire z^{1992} et z^{1994}.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle) . En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz-1)^3 + 8 = 0$. Donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 14

Soit (E) l'équation complexe : $\dfrac{1}{z} - 2\overline{z} + z - 1 = 0$.

1. Démontrer que $z = x + iy$ avec x et y réels est solution de (E) si et seulement si : $\begin{cases} -x^2 - x - 3y^2 + 1 = 0 \\ (2x-1)y = 0 \end{cases}$.

2. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 15

1. Développer $(1-\sqrt{2})^2$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l' équation $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

3. Résoudre dans l'ensemble des complexes les équations $z + \dfrac{1}{z} = 1$ puis $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$.

4. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$.
Vérifier que pour tout z non nul, on a $\dfrac{P(z)}{z^2} = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$.
En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 8 cm.
On appelle A le point d'affixe −1 et B le point d'affixe 1. On appelle E l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
À tout point M d'affixe z appartenant à E, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points M appartenant à E tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si

$$|z+1|^2 + |z|^2 = 1.$$

b. Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z + \dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{z + \dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble C cherché.

3. Soit M un point de E et z son affixe, on désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha \in \left]-\pi\,; +\pi\right]$.

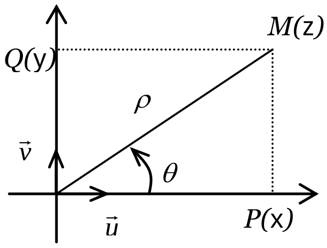
a. Démontrer que l'ensemble F des points M de E tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles C et F dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

c. Déterminer les affixes des points M de E tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

Nombres complexes

Forme : ***algébrique*** $z = x + iy$ ***trigonométrique*** $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overline{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{OP} = x = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OP} = y = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}[\pi]$

Formules d'Euler

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Opérations algébriques

$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$

$z \cdot z' = (x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$; $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\cdot\bar{z}'$

Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$ $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$; $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$z \cdot z' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\cdot\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$ $|zz'| = |z|\cdot|z'|$; $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, \ n \in \mathbb{N}$

Angle de deux vecteurs : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$ *Distance de deux points :* $AB = |b - a|$

Similitude directe *:* $S(\Omega(\omega), k, \theta) : z \to z' / \ z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ *; avec θ=0 : homothétie, avec k=1 : rotation*

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$ Inégalité triangulaire *:* $\big||z| - |z'|\big| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ Produit scalaire *:* $p = z.\bar{z}' + \bar{z}.z'$

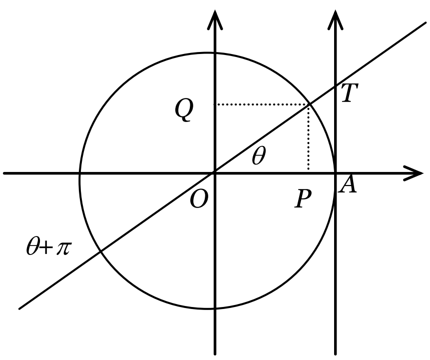
Identités remarquables (valables sur ℂ et donc sur ℝ .)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Binôme de Newton : $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$

Trigonométrie



$\overline{OP} = \cos\theta$ $\overline{OQ} = \sin\theta$

$\overline{AT} = \tan\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

sin(ax), cos de période $2\pi/a$

tan(ax) de période π/a

Angles associés :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

Equations :

sinx=sina : $x = a[2\pi]$ ou $\pi - a[2\pi]$

cosx=cosb : $x = b[2\pi]$ ou $-b[2\pi]$

tanx=tanc : $x = c[\pi]$

Formules d'addition : $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$	$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$	$\sin 2a=2\sin a\cos a$
$\cos^2 a=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$; $\sin^2 a=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$	$\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$$si\ t=\tan\frac{\theta}{2}\ :\ \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}\ ;\ \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

Formules de transformation

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$$

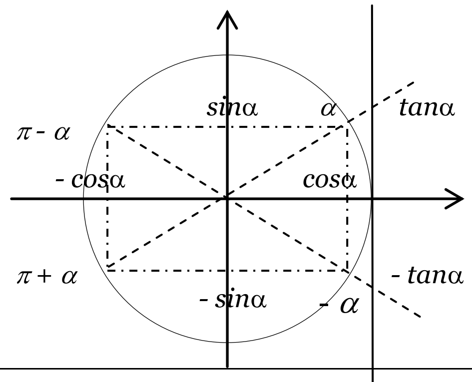
$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\qquad \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\qquad \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



Formule de Moivre **:** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}\ ou\ \left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Racines nièmes de l'unité : $u_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *où* $k=0,1,2,\ldots,n-1\ ;\ |u_k|=1$

Les solutions de $z^n=a$, *où* $a=\rho e^{i\alpha}$, *sont* $z_k=z_0u_k$, *où* $z_0=\rho^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha}{n}}$

Equation du second degré

a, b, c *des réels,* $a\neq 0$ *, et* $\Delta=b^2-4ac$. *L'équation P=* $az^2+bz+c=0$ *admet :*

si $\Delta>0$, *deux solutions réelles :* $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

P du signe de a *à l'extérieur des racines,* – a *à l'intérieur.*

si $\Delta=0$ *,une solution réelle double :* $z_1=z_2=\dfrac{-b}{2a}$

P du signe de a

si $\Delta<0$, *2 solutions complexes conjuguées :* $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

P dans $\mathbb{R}$ *du signe de* a

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)\qquad S=z_1+z_2=-\frac{b}{a}\ ;\ P=z_1z_2=\frac{c}{a}$$