Exercice n°1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

A/

1. Calculer u_1 et u_2. U est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq 5$.
3. Montrer que la suite est croissante sur $\mathbb{N}$.
4. En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

B/

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$.

1. Montrer que v est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim_{+\infty} v_n$ puis $\lim_{+\infty} u_n$.
4. Soit pour tout entier naturel n : $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $s'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   a. Exprimer s_n puis s'_n en fonction de n
   b. Calculer $\lim_{+\infty} s_n$ puis $\lim_{+\infty} s'_n$.

Exercice n°2 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{4+3x}$..

On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

1.
   a. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 4$.
   b. Etudier la monotonie de la suite u.
   c. En déduire que u est convergente.
2.
   a. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$.
   b. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ |u_n - 4| \leq 4(\frac{3}{4})^n$ et puis $\lim_{+\infty} u_n$.

Exercice n°3 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.
2. a. Vérifier que $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$ (1)
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 1$ et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$ (2)
6. Montrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$ (on pourra utiliser les relations (1) et (2))
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$
8. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et conclure.