FEUILLE D'EXERCICES N°02 $\star$ Suites réelles $\star$

$4^{\text{ième}}$Sciences informatique 1 et2 **2009 ⊚ 2010**

ISSAOUI HACEN

Exercice 01

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 4}$.

1. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{2}$.
   (b) Montrer que u est croissante. Conclure.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - 2\sqrt{2} \geq \frac{1}{2}\left(u_n - 2\sqrt{2}\right)$.

   (b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(1 - 2\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq u_n - 2\sqrt{2} \leq 0$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 02

Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$.
2. Montrer que (x_n) est croissante.
3. En déduire que (x_n) est convergente et calculer sa limite.

   (a) Montrer qu'il existe $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x_0 = \cos\theta$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \cos\left[\frac{\theta}{2^n}\right]$.

   (c) En déduire les résultats de 3..

Exercice 03

Soit la suite réelle t définie sur $\mathbb{N}$ par: $t_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + \frac{1+t_n}{1+2t_n}$.

1. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et que t est croissante.
   (b) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_{n+1} \geq t_n + \frac{1}{2}$ et que $t_n \geq 1 + \frac{n}{2}$.

   (b) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

2. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = t_{n+1} - t_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $v_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 04

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$par $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Cocher la (ou les) réponse correcte:

1. On a: (a) $u_1 = 2$ (b) $u_1 = 6$ (c) $u_1 = 1$ (d) $u_1 =\mathrm{C}_8^4$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$

   (a) 4 (b) $\dfrac{4n+2}{n+1}$ (c) $\dfrac{8n+4}{(n+1)^2}$ (d) $4 - \dfrac{2}{n+1}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

   (a) $u_n \geq \dfrac{2^{2n}}{2n}$ (b) $u_n < \dfrac{2^{2n}}{2n}$ (c) $u_n > 2^n$ (d) $u_n \leq 2^n$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

   (a) 0 (b) 1 (c) $+\infty$ (d) un réel $\ell \geq 2$.

Exercice 05

Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse:

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite bornée est convergente.
3. Si une suite u converge vers 0 et si une suite v est bornée, alors la suite uv est convergente.
4. Si u converge et si v diverge, alors $u + v$ diverge.
5. Si u converge et si v diverge, alors $u \times v$ diverge.

Exercice 06

Cocher la réponse correcte:

1. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (b) $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (c) (u_n) est majorée par 1.
2. On donne $v_n = \dfrac{n + \cos n}{n+1}$.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.