

Pour décrire le résultat d'une expérience aléatoire associée à un univers Ω , on fait souvent correspondre un nombre à chaque élément de Ω .

▪ **Exemple introductif**

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait simultanément 2 boules.

1) Déterminer $\text{card } \Omega = \dots\dots\dots$

2) On perçoit un dinar pour chaque boule rouge tirée. Désignons par X la somme gagnée à l'issue d'un tirage de 2 boules.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? $\dots\dots\dots$

b) Quelle est la probabilité de l'événement « gagner 0 dinar » ? On note cette probabilité $p(X = 0)$.

c) Calculer de même $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

Les résultats précédents peuvent être présentés dans un tableau

Gain x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
Probabilité $p_i = p(X = x_i)$			

Ce tableau définit **la loi de probabilité** de X .

▪ **Aléa numérique (Variable aléatoire). Loi de probabilité**

Définition :

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p .

On appelle **aléa numérique X** défini sur Ω une application qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Désignons par $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X .

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}.$$

La **loi de probabilité de X** est l'application qui à tout élément x de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x . Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x ».

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

▪ **Exercice**

On place dans une urne six boules numérotés de 0 à 5, indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer simultanément trois boules.

1. Quel est le nombre de tirages possibles.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les trois boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

▪ **Espérance mathématique**

Définition

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n .

On appelle **espérance mathématique** de X le nombre $E(X)$ défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^n (p_i x_i)$.

Exemple

Soit X un aléa numérique dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

x	0	1	2
$p(X = x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dots\dots\dots$

Propriétés :

Soient X et Y deux aléas numériques définies sur Ω et a un réel. L'espérance des variables aléatoires X + Y et a X est donnée par :

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(a X) = a E(X)$.

Variance, écart type

Variance :

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n .

On appelle **variance** de X, le nombre noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2.$$

Exemple

Calculons la variance de X de l'exemple précédent.

On sait que $E(X) = \frac{6}{7}$. D'où :

$$V(X) = \frac{2}{7} \left(0 - \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{4}{7} \left(1 - \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{1}{7} \left(2 - \frac{6}{7}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{140}{343} \approx 0,408$$

Ou bien
$$V(X) = \frac{2}{7} \times 0 + \frac{4}{7} \times 1 + \frac{1}{7} \times 4 - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{8}{7} - \frac{36}{49} = \frac{20}{49} \approx 0,408$$

Propriétés :

$$V(X) \geq 0.$$

$$V(X + a) = V(X).$$

$$V(a X) = a^2 V(X).$$

L'écart type

L'écart type d'un aléa numérique X est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 4 page 94.

▪ **Fonction de répartition**

Dans le cas de l'exemple du paragraphe (aléas numériques), on peut se poser les questions suivantes :

Quelle est la probabilité de gagner au plus deux dinars ? au moins un dinars ? etc.

La connaissance de la fonction de répartition permet de répondre à ces questions.

Définition

Soit un aléa numérique X défini sur un univers Ω muni d'une probabilité p .

La fonction de répartition F de X est la fonction de \mathbb{R} vers $[0 ; 1]$ qui, à tout réel x , associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :

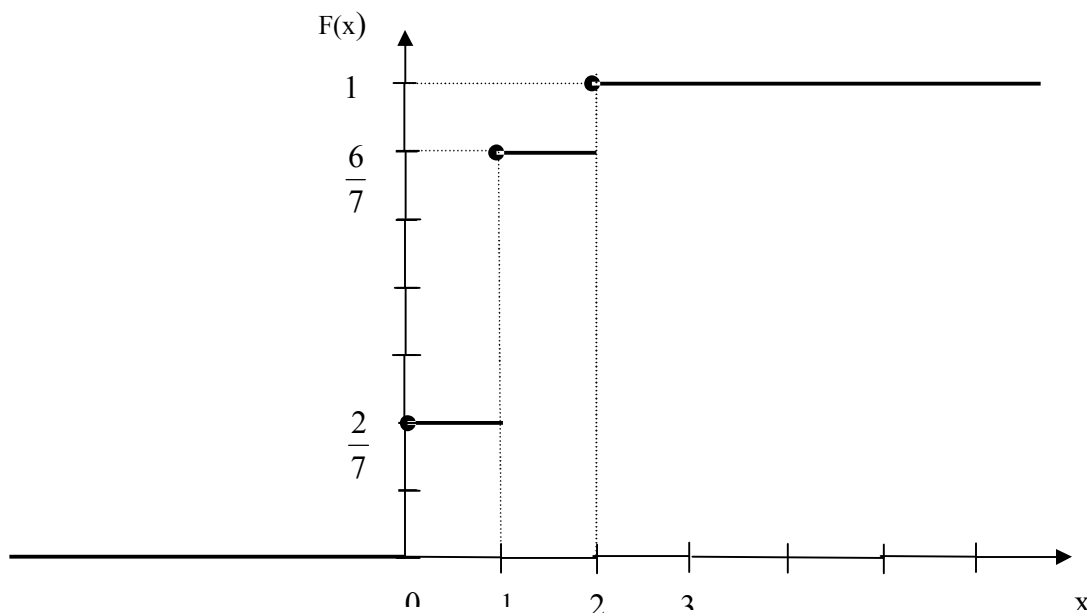
$$F(x) = p(X \leq x).$$

La fonction de répartition est constante par intervalles.

Exemple : Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.

Intervalles des valeurs de x	Valeurs de X vérifiant $X \leq x$	$F(x)$, c'est - à - dire $p(X \leq x)$, vaut :
$]-\infty;0[$	Aucune	0
$[0;1[$	0	$p(X = 0) = \frac{2}{7}$
$[1;2[$	0 et 1	$p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$
$[2;+\infty[$	0, 1 et 2	$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = 1$

Représentation graphique de F



Propriétés de la fonction de répartition

- ✓ F est une fonction en escalier ; F est une fonction croissante.
- ✓ A partir de F on peut retrouver la loi de probabilité de X.

Exemple : $p(X = 1) = F(1) - F(0) = \frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

Exercice 3 page 94.

▪ **Loi Binomiale :**

Exemple introductif :

On lance quatre fois de suite un jeton truqué dont les faces sont numérotés 0 et 1, avec la probabilité d'obtenir 1 est $\frac{3}{4}$.

- Chaque lancer est une épreuve ayant deux issues « 0 ou 1 »

On a donc une répétition quatre fois de suite de la même épreuve dans les mêmes conditions et avec indépendance entre elles.

- Pour l'une de ces quatre épreuves on appelle succès et on note S l'événement « obtenir 1 » et donc échec noté E l'événement « obtenir 0 »

On a : $p(S) = \frac{3}{4}$ et $P(E) = 1 - p(S) = \frac{1}{4}$.

- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série de quatre lancers associe le nombre de succès réalisés, c. a. d « le nombre de fois où l'on a obtenu 1 »

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- $\{X = 0\}$: les quatre numéros obtenus sont : (0, 0, 0, 0) c. a. d (E, E, E, E).

$\Rightarrow p(\{X = 0\}) = [p(E)]^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

- $\{X = 1\}$: « Obtenir une seule fois le numéro 1 » ou bien « obtenir un seul succès »

→ (S, E, E, E) ou (E, S, E, E) ou (E, E, S, E) ou (E, E, E, S).

$\Rightarrow p(X = 1) = 4 \times p(S) \times [p(E)]^3 = C_4^1 \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$

- $\{X = 2\}$: « obtenir 2 succès pendant les quatre épreuves »

→ (S, S, E, E) ou (S, E, S, E) ou (S, E, E, S).

ou (E, S, S, E) ou (E, S, E, S) ou (E, E, S, S)

$\Rightarrow p(X = 2) = C_4^2 \times [p(S)]^2 \times [p(E)]^2 = C_4^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$C_4^2 = 6$ correspond au nombre de choix de 2 places parmi 4.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$	$C_4^1 \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$	$C_4^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$	$C_4^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)$	$C_4^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0$

Définitions :

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
- Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
- Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
- La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

Si l'épreuve est répétée n fois alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

et on a pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $p(X = k) = C_n^k \times [p(S)]^k \times [p(E)]^{n-k}$

→ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p = p(S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note B(n, p).

Théorème :

Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors $E(X) = n \times p$

$$V(X) = np(1-p) = n \times p \times q \text{ où } q = 1-p$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Exercice :

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher : six boules blanches numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 2 et quatre boules noires numérotées 1, 1, 2, 2.

1- Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules du sac. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

S : « Tirer trois boules blanches »

E : « Tirer au moins une boule noire »

C : « La somme des chiffres marqués sur les trois boules tirées est égale à 5 ».

2- On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.

Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'évènement S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique et son écart type.

c) Calculer la probabilité de l'évènement : « $1 \leq X < 3$ »

LOIS DE PROBABILITE CONTINUES :

Dans les exemples précédents, la variable aléatoire X prend des valeurs isolées x_1, x_2, \dots, x_n . On dit que X est discrète.

Or dans les domaines économiques et industriels, on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre n'importe quelle valeur dans \mathbb{R} ou dans un intervalle de \mathbb{R} .

Exemple : La durée de vie d'une machine, avec l'intervalle $[0, +\infty[$.

Définition : Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de \mathbb{R} .

On s'intéresse alors à des événements du type : « La valeur de X est comprise entre les réels a et b » Nous noterons $(a \leq X \leq b)$ un tel événement.

Densité : On appelle densité de probabilité continue la fonction f positive et continue sur $[a, b]$ telle que :

$$\int_a^b f(t)dt = 1 \text{ et pour tous } x \text{ et } y \text{ de } [a, b], \text{ on a } p(x \leq X \leq y) = \int_x^y f(t)dt.$$

Exemples de variables aléatoires continues

1) Loi uniforme :

Définition :

Soit un intervalle $[a, b]$. La fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a, b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a, b]$ l'application qui à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$ associe le réel

$$p([c, d]) = \int_c^d f(x)dx.$$

Conséquences :

- $p([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$
- Pour tout réel x_0 de $[a, b]$ on a : $p(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$
- $p([a, b]) = p(]a, b]) = p([a, b[) = p(]a, b[)$.
- si on désigne par $\overline{[c, d]}$ le complémentaire de $[c, d]$ dans $[a, b]$, alors $p(\overline{[c, d]}) = 1 - p([c, d])$.

Définition : on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$ suit la loi de probabilité uniforme p

$$\text{si : } p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Fonction de répartition d'une variable qui suit une loi uniforme :

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a, b]$.

On appelle fonction de répartition de X , l'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ p(a \leq X \leq x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

2) Loi exponentielle :

Définition :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , l'application p qui :

- à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[0, +\infty[$ associe le réel $p([c, d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$
- à tout intervalle $[c, +\infty[$ inclus dans $[0, +\infty[$ associe le réel $p([c, +\infty[) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_c^x \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c}$

Propriétés :

1. pour tout réel $t > 0$, $p([0, t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. $p([t, +\infty[) = 1 - p([0, t]) = e^{-\lambda t}$.

Définition : on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ ,

$$\text{si : } p(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d} \quad \text{et} \quad p(X \geq c) = e^{-\lambda c}$$

Fonction de répartition d'une variable qui suit une loi exponentielle :

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle p sur de paramètre λ .

On appelle fonction de répartition de X , l'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ p(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Exercice rédigé :

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$p(X > 10) = 1 - p(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} 0,1 e^{-0,1t} dt = \frac{1}{e}$$

b) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

$$p(X > 12 / x > 10) = \frac{p(X > 12)}{p(X > 10)} = \frac{e^{-0,1 \times 12}}{e^{-0,1 \times 10}} = e^{-0,2} \approx 0,82.$$

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 0,1 e^{-0,1t} dt = e^{-0,2} \approx 0,82$$

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge.

On dit que X est une loi de durée de vie sans vieillissement.