Similitudes

4ème math

B.H.Hammouda Fethi

I/ Définition et propriétés:

Soit k un réel strictement positif .Toute application du plan dans lui-même telle que pour tous A et B d'image respectives A' et B' par f , on a $A'B' = kAB$ est appelée une similitude de rapport k .

Exemples :

1-Toute isométrie est une similitude de rapport k=1 .

2-Toute homothétie de rapport $k \neq 0$ est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème :

Si f est une similitude de rapport k et g est une de rapport k' alors $f \circ g$ est une similitude de rapport kk'.

Théorème :

Soient H une homothétie de rapport k et H' une homothétie de rapport k' alors :

- Si $kk' = 1$ alors $H \circ H'$ est une translation.
- Si $kk' \neq 1$ alors $H \circ H'$ est une homothétie de rapport kk'.

Théorème :

Les similitudes sont les composées des isométries et des homothéties.

Théorèmes :

- Une similitude de rapport k est bijective et sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$ en effet $A'B' = kAB \Leftrightarrow AB = \frac{1}{k}A'B'$.
- Les similitudes conservent l'alignement.
- Les similitudes conservent le parallélisme et l'orthogonalité.
- Les similitudes conservent le barycentre et en particulier le milieu.
- Une similitude transforme un cercle de centre O et de rayon R en un cercle de centre $O' = f(O)$ et de rayon kR et conserve le contact.
- Soient A,B,C,D ,E et F six points d'images respectives par une similitude de rapport k A',B',C',D',E' et F' si $\overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{E'F'} = a\overrightarrow{A'B'} + b\overrightarrow{C'D'}$ et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Théorème:

Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coïncident sur tout le plan.

II/Similitude directe - similitude indirect :

1)Généralité :

Définition :

- On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
- On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Conséquences :

Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.

Toute similitude indirecte transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Théorème:

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directes.
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directes.
- La composée d'une similitude indirectes et d'une similitude directes est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Théorème:

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

- Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.
- Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

2) Similitudes directes :

a- Angle d'une similitude directe :

Théorème et définition :

Soit f une similitude directe alors il existe un réel θ , appelé l'angle de la similitude qui vérifie : pour tout points A et B d'image respectives A' et B' par f , on a $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta[2\pi]$.

Théorème:

Toute similitude directe de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Vocabulaire et notation :

- Si f est une similitude directe de centre I , de rapport k et d'angle θ on note $f = S_{(I,k,\theta)}$. I , k et θ sont les élément caractéristique de f
- Si $f = S_{(I,k,\theta)}$ alors pour tout point $M \neq I$ d'image M' par f , on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ \left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}.$$

- $S_{(I,k,\theta)} \circ S_{(I',k',\theta')} = S_{(I,kk',\theta+\theta')}$.
- Si $f = S_{(I,k,\theta)}$ alors $f^{-1} = S_{\left(I,\frac{1}{k},-\theta\right)}$.

Théorème:

Toute similitude directe de centre I , de rapport k et d'angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ cette décomposition s'appelle forme réduite de f .

Activité 3 page 85 :

2) Similitudes indirectes :

Théorème et définition :

Une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

<u>Théorème:</u>

Toute similitude indirecte f de centre A , de rapport $k \neq 1$, se décompose de façon unique sous la forme : $f = H \circ S_\Delta = S_\Delta \circ H$ où $H = h_{(A,k)}$ et Δ passe par A. cette écriture s'appelle forme réduite de f et Δ est son axe .

<u>Conséquence :</u>

Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2 .

<u>Propriété :</u>

Si f est une similitude indirecte de centre I et d'axe D .Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D alors $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{IM})[2\pi]$ c.à.d. la droite D porte la bissectrice intérieur de MIM' .

<u>Théorème :</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

- L'application f est une similitude directe de centre I , de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ ssi il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $z_I = \dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I .
- L'application f est une similitude indirecte de centre I , de rapport $k \neq 1$ ssi il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$ dan ce cas $k = |a|$ et $z_I = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ est l'affixe de I.

<u>Activité 2 page 86 :</u>