Les suites réelles

http://www.sigmaths.co.cc

Suites Réelles

Dans ce chapitre I désigne l'ensemble des entiers $n \geq n_0 \quad (n_0 \in \mathbb{N})$

I. Rappels et compléments

1. Suite arithmétique

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I.

On dit que (u_n) est une suite arithmétique s'il existe une constante réelle r telle que pour tout entier n de I, $u_{n+1} - u_n = r$.

On dit dans ce cas que (u_n) est une suite arithmétique de raison r

Conséquences

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

- Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tous entiers naturels p et q on a : $u_p = u_q + (p - q)r$.
- Pour tous entiers naturels p et q tels que $p \leq q$, on a :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q = \frac{q - p + 1}{2}(u_p + u_q)$$

2. Suite géométrique

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I.

On dit que (u_n) est une suite géométrique s'il existe une constante réelle q telle que pour tout entier n de I, $u_{n+1} = qu_n$.

On dit dans ce cas que (u_n) est une suite géométrique de raison q

Conséquences

Soit (u_n) une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme u_0

- Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.
- Pour tous entiers naturels n et m on a : $u_n = u_m q^{n-m}$.
- Pour tous entiers naturels m et n tels que $n \leq m$, on a :

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - q^{m-n+1}}{1 - q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ (m - n + 1)\, u_0 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

- $$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad q > 1 \\ 1 & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas si} & q \leq -1 \end{cases}$$

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = n\ u_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

1. $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = nu_n + 4 - nu_n = 4 \Rightarrow (v_n)$ est une suite arithmétique de raison r=4 et de premier terme $v_1 = 1 \cdot u_1 = 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 + (n-1)r = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$ et $u_n = \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{4n-3}{n}$.

Exercice 2

Soit $a > 1$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, (u_n) existe et vérifie $u_n > 1$.
2. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n et a.

Solution

1. On procède par récurrence
   - Pour n=0, on a $u_0 = a > 1$, vrai
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n existe et $u_n > 1$ et montrons que u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 1$.

     $u_n > 1 \Rightarrow 2u_n > 2 \Rightarrow 2u_n - 1 > 1 \Rightarrow 2u_n - 1 \neq 0 \Rightarrow u_{n+1}$ existe

     $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1 = \dfrac{3u_n - 2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

     $u_n > 1$ donc $2u_n - 1 > 0$ et $u_n - 1 > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$.

2. a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2$

   Ce qui prouve que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

   Son premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{a - 1}$.

   b) $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{a-1} + 2n = \dfrac{2(a-1)n + 1}{a - 1}$

   $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{a-1}{2(a-1)n + 1} + 1 = \dfrac{a + 2(a-1)n}{2(a-1)n + 1}$

Exercice 3 (suite Arithmético-géométrique)

Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 6$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n
3. Calculer, en fonction de n, la somme $S = \sum_{k=n}^{2n} u_k$.

Solution

1. $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 7$.

2. $v_n = v_0 q^n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n - 6 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

3. $S = \sum_{k=n}^{2n} u_k = \sum_{k=n}^{2n}(v_k - 6) = \sum_{k=n}^{2n} v_k - 6(2n - n + 1) = v_n \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 6(n+1)$

Donc $S = 14\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 6(n+1)$

3. Convergence et divergence d'une suite

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I.

On dit que (u_n) est **convergente** (ou encore admet une limite finie) s'il existe un réel l vérifiant : Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \in I, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Autrement dit, tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Parfois on dit, tout intervalle ouvert de centre l contient **presque** tous les termes de la suite.

Remarques

- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** (admet une limite infinie ou n'admet pas de limite)
- Si une suite (u_n) admet une limite finie l alors cette limite est unique et on note dans ce cas $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ ou tout simplement $\lim u_n = l$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n-5}{n+1}$.

Montrons que (u_n) converge vers 2.

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout entier naturel n, $n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

$$|u_n - 2| = \left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{\cancel{2n} - 5 - \cancel{2n} - 2}{n+1}\right| = \frac{7}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 1$$

Il suffit alors de choisir $p = E\left(\dfrac{7}{\varepsilon} - 1\right) + 1$ si $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1 > 0$ (E désigne la partie entière)

ou p=1 si $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1 < 0$ et pour le dire en un seul mot $p = sup\left(1, E\left(\dfrac{7}{\varepsilon} - 1\right) + 1\right)$.

Ainsi on a : $n \geq p > \dfrac{7}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \dfrac{7}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Définition

❖ On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $\lim u_n = +\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n > A$.
Autrement dit, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.

❖ On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $\lim u_n = -\infty$ si pour tout réel $A < 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n < A$.
Autrement dit, tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n^2 - 1$

Montrons que $\lim u_n = +\infty$.

Soit $A > 0$, montrons qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n > A$.

$$u_n > A \Leftrightarrow 2n^2 - 1 > A \Leftrightarrow 2n^2 > A + 1 \Leftrightarrow n^2 > \frac{A+1}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A+1}{2}} \text{ car } n \in \mathbb{N}.$$

il suffit alors de choisir $p = E\left(\sqrt{\dfrac{A+1}{2}}\right) + 1$.

4. Opérations sur les suites convergentes

Comme pour les fonctions, on peut définir les opérations usuelles sur les suites.

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur I.

Pour tout entier $n \in I$, on a :

- $(u+v)_n = u_n + v_n$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda u)_n = \lambda \times u_n$.
- $(uv)_n = u_n \times v_n$
- Si (v_n) est une suite à termes non nuls alors : $\left(\dfrac{1}{v}\right)_n = \dfrac{1}{v_n}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

Théorème I

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur I.

Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors :

les suites $u+v$, λu $(\lambda \in \mathbb{R})$, uv et $|u|$ sont convergentes.

Si en plus (v_n) est une suite a termes non nuls et $lim\, v_n \neq 0$ alors les suites $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont convergentes et on a :

$lim(u+v)_n = lim\, u_n + lim\, v_n$.

$lim(\lambda u)_n = \lambda \times lim\, u_n$.

$lim(uv)_n = lim\, u_n \times lim\, v_n$.

$lim\, |u_n| = |lim\, u_n|$

$lim\left(\dfrac{1}{v}\right)_n = \dfrac{1}{lim\, u_n}$.

$lim\left(\dfrac{u}{v}\right)_n = \dfrac{lim\, u_n}{lim\, v_n}$.

Exercice

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

a) $u_n = \dfrac{2-3n+n^2}{n^2+n+1}$ b) $u_n = \sqrt{4n^2+1} - 2n$ c) $u_n = \dfrac{(-3)^n - 1}{(-3)^n + 1}$

Solution

a) $$lim\, u_n = lim \frac{2-3n+n^2}{n^2+n+1} = lim \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 1\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{lim\left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 1\right)}{lim\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

b) $$lim\, u_n = lim \sqrt{4n^2+1} - 2n = lim \frac{\cancel{4n^2} + 1 - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} = lim \frac{1}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} = 0$$

c) $$lim\, u_n = lim \frac{(-3)^n - 1}{(-3)^n + 1} = lim \frac{1 - \frac{1}{(-3)^n}}{1 + \frac{1}{(-3)^n}} = lim \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = 1$$ car la suite

$n \mapsto \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$ donc sa limite égale à 0.

Théorème 2

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$lim\, u_n = a \Leftrightarrow lim\, u_{2n} = lim\, u_{2n+1} = a$

Démonstration

Supposons dans la suite que a est fini

Montrons que $lim\, u_n = a \Rightarrow lim\, u_{2n} = lim\, u_{2n+1} = a$

Soit $\varepsilon > 0$, $lim\, u_n = a \Rightarrow il$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I$, $n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

Et puisqu'on a pour tout $n \in I$, $2n+1 \geq 2n \geq n$ alors :

$n \geq p \Rightarrow \begin{cases} |u_{2n} - a| < \varepsilon \\ |u_{2n+1} - a| < \varepsilon \end{cases}$ d'où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et

$lim\, u_{2n} = lim\, u_{2n+1} = a$

Réciproquement

Soit $\varepsilon > 0$, $lim\, u_{2n} = a \Rightarrow il$ il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p_1 \Rightarrow |u_{2n} - a| < \varepsilon$

et $lim\, u_{2n+1} = a \Rightarrow il$ il existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - a| < \varepsilon$

Posons $p = sup(2p_1, 2p_2 + 1)$.

Soit $m \in I$, deux cas peuvent se présenter

- $m = 2n$

  $m \geq p \Rightarrow n \geq p_1 \Rightarrow |u_{2n} - a| = |u_m - a| < \varepsilon$
- $m = 2n + 1$

  $m \geq p \Rightarrow n \geq p_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - a| = |u_m - a| < \varepsilon$

Dans le cas où a est infini, la démonstration se fait presque de la même façon.

Exercice

Etudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = (-1)^n$ b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ c) $u_n = \dfrac{1}{n} cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Solution

a) $\begin{cases} u_{2n} = 1 \\ u_{2n+1} = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} lim\, u_{2n} = 1 \\ lim\, u_{2n+1} = -1 \end{cases}$

$lim\, u_{2n} \neq lim\, u_{2n+1} \Rightarrow$ la suite (u_n) n'a pas de limite donc elle est divergente.

b) $\begin{cases} u_{2n} = \dfrac{1}{n} \\ u_{2n+1} = \dfrac{-1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} lim\, u_{2n} = 0 \\ lim\, u_{2n+1} = 0 \end{cases}$ et comme les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

convergent vers la même limite 0 donc la suite (u_n) converge vers 0.

c) Posons $v_n = u_{2n} = \dfrac{1}{2n}\cos(n\pi)$ et $w_n = u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} cos\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$x_n = v_{2n} = \dfrac{1}{4n} cos(2n\pi) = \dfrac{1}{4n}$ et $y_n = v_{2n+1} = \dfrac{1}{2(2n+1)} cos((2n+1)\pi) = \dfrac{-1}{4n+2}$

Il est évident que chacune des suites (x_n) et (y_n) converge vers 0, donc la suite (v_n) converge vers 0.

Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers 0, donc la suite (u_n) converge vers 0.

5. Suites bornées et convergence

Théorème 3

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l.

$\lim u_n = l$ donc il existe un entier naturel p tel que, $n \in I$ et $n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < 1$

Autrement dit, $\forall n \geq p,\ u_n \in]l-1, l+1[$.

On pose $m = \inf\{l-1, u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{p-1}\}$ et $M = \sup\{l+1, u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{p-1}\}$

Soit $n \in I$.

Si $n \geq p$ alors $m \leq l-1 < u_n < l+1 \leq M$

Si $n_0 \leq n < p$ alors $u_n \in \{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{p-1}\}$ donc $m \leq u_n \leq M$

Remarque

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exemple : $u_n = (-1)^n$

II. Limites et ordre

Théorème 4

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l.

S'il existe $p \in I$ tel que, pour tout entier $n \geq p,\ u_n \geq 0$ (resp $u_n \leq 0$) alors $l \geq 0$ (resp $l \leq 0$)

Démonstration

Supposons que $l < 0$.

On a $\lim u_n = l$ donc pour $\varepsilon = \frac{-l}{2} > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in I$, $n \geq q \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

$|u_n - l| < \frac{-l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} < u_n - l < \frac{-l}{2} \Rightarrow u_n < \frac{l}{2} < 0$ ce qui est impossible si on choisit $n \geq \sup(p, q)$.

On appliquant ce résultat à la suite $-u$, on montre que si $u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang alors $l \leq 0$.

	$u_n > 0$ à partir d'un certain rang $\not\Rightarrow$ $l > 0$. On peut avoir $u_n > 0$ pour tout $n \in I$ et $l = 0$. Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Conséquences

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers deux réels l et l'.
Si on a $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $l \leq l'$

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l et a et b deux réels.
Si $u_n \in [a, b]$ à partir d'un certain rang alors $l \in [a, b]$

Ce résultat n'est pas toujours vrai si on remplace l'intervalle fermé $[a, b]$ par l'intervalle ouvert $]a, b[$

	$u_n < v_n$ à partir d'un certain rang $\not\Rightarrow$ $l < l'$. On peut avoir $u_n < v_n$ pour tout $n \in I$ et $l = l'$. Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$

Théorème 5 (théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles définies sur I et l un réel.

Si on a : $\begin{cases} \text{Il existe p} \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout entier } n \geq p,\ u_n \leq w_n \leq v_n \\ \lim u_n = \lim v_n = l \end{cases}$

Alors $\lim w_n = l$

Démonstration

Pour tout $n \in I$ posons $x_n = w_n - u_n$ et $y_n = v_n - u_n$

On a : $\forall n \in I,\ 0 \leq x_n \leq y_n$

Soit $\varepsilon > 0$.

La suite (y_n) est convergente et $\lim y_n = l - l = 0 \Rightarrow$ Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I,\ n \geq p \Rightarrow |y_n| = y_n < \varepsilon$.

Donc pour $n \in I$ et $n \geq p$ on a : $0 \leq x_n \leq y_n < \varepsilon$

On a alors : **$\forall \varepsilon > 0$ il existe $p \in I$ tel que $\forall n \in I,\ n \geq p \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$**

Donc la suite (x_n) converge vers 0

Et puisqu'on a $w_n = x_n + u_n$ pour tout $n \in I$ alors la suite (w_n) est convergente (comme somme de deux suites convergentes) et $\lim w_n = l$.

Conséquence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I.
$|u_n| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = 0$ $\quad\quad \lim u_n = 0$

Exemple 1

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

Montrer que $\lim u_n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = \left|\dfrac{\cos n}{n}\right| = \dfrac{|\cos n|}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ car pour tout réel x, $|\cos x| \leq 1$

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq \dfrac{1}{n} \\ \lim \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$ donc $\lim u_n = 0$.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n - \sin n}{2n + (-1)^n}$

Etudions la convergence de cette suite.

Pour tout entier naturel n supérieur à 1 on a :

$$-1 \leq -\sin n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq n - 1 \leq n - \sin n \leq n + 1$$

Pour tout entier naturel n supérieur à 1 on a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow 0 < 2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n + (-1)^n} \leq \frac{1}{2n-1}$$

Ainsi pour $n \geq 1$ on a: $\begin{cases} 0 \leq n - 1 \leq n - \sin n \leq n + 1 \\ 0 < \dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{1}{2n + (-1)^n} \leq \dfrac{1}{2n-1} \end{cases}$

En multipliant ces deux encadrements, membre à membre on trouve

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n-1}$$

En plus $\lim \dfrac{n-1}{2n+1} = \lim \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim \dfrac{n+1}{2n-1} = \lim \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$

Donc d'après le théorème des gendarmes on peut conclure que la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exemple 3

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$

Etudions la convergence de cette suite.

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier $k \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$n^2+1 \le n^2+k \le n^2+n \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \le u_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$ (somme des n encadrements membre à membre) j'espère que c'est clair !

Il semble que les extrémités du dernier encadrement ont la même limite, vérifions alors ça.

$$lim \frac{n^2}{n^2+n} = lim \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{et} \quad lim \frac{n^2}{n^2+1} = lim \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

On a alors $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1} \\ lim \frac{n^2}{n^2+n} = lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \end{cases}$

Donc d'après le théorème des gendarmes la suite (u_n) est convergente et $lim\, u_n = 1$

Théorème 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I.

- S'il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I$ et $n \ge q$, $u_n \le v_n$ et $lim\, u_n = +\infty$ **alors** $lim\, v_n = +\infty$
- S'il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I$ et $n \ge q$, $u_n \le v_n$ et $lim\, v_n = -\infty$ **alors** $lim\, u_n = -\infty$

Démonstration

❖ Soit $A > 0$, montrons qu'il existe un entier naturel m tel que $\forall n \in I$, $n \ge m \Rightarrow v_n > A$.

On a $lim\, u_n = +\infty \Rightarrow$ il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I$, $n \ge p \Rightarrow u_n > A$

Posons $m = sup(p,q)$ et soit $n \in I$. $n \ge m \Rightarrow v_n \ge u_n > A$

Donc $lim\, v_n = +\infty$.

❖ Pour $n \ge q$ on a $-v_n \le -u_n$ en plus $lim(-v_n) = +\infty \Rightarrow lim(-u_n) = +\infty$

Donc $lim\, u_n = -\infty$

Exercice

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

2) En déduire que $lim\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$

Solution

1) On a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$n+1>n \Leftrightarrow \sqrt{n+1}>\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$

2) On a : $\forall k\in\{1,2,....,n\}\ \sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}$

Faisant la somme membre à membre

$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$ ou encore

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+....+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+....+\frac{1}{2\sqrt{n}}$

Ce qui donne après simplification $\sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

D'où $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$ et puisqu'on a $lim(2\sqrt{n+1}-2)=+\infty$

alors $lim\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$.

III. Suites de type $v_n=f(u_n)$

Théorème 7

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre a et (u_n) une suite à valeurs dans J.
Si (u_n) converge vers a et f continue en a **alors** la suite $f(u_n)$ converge vers $f(a)$

Démonstration

Soit $\varepsilon>0$.
Montrons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in I,\ n\geq p\Rightarrow|f(u_n)-f(a)|<\varepsilon$
On a :
f continue en a $\Rightarrow$ il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in J,\ |x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$
(u_n) converge vers a donc il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in I,\ n\geq p\Rightarrow|u_n-a|<\alpha$
Donc pour $n\in I$ et $n\geq p$ on a $u_n\in J$ et $|u_n-a|<\alpha$ ce qui permet d'écrire $|f(u_n)-f(a)|<\varepsilon$ <u>**cqfd**</u>

Exercice

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n

par : $u_n = n^2\left(1 - cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Déterminer $lim\, u_n$

Solution

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - cos\, x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Il est évident que $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ pour tout entier naturel n non nul.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ (Résultat de cours) alors f est continue en 0

En plus $lim\, \frac{1}{n} = 0$ donc la suite (u_n) converge vers $f(0)$=1.

Théorème 8

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre l sauf peut être en l et (u_n) une suite à valeurs dans $J \setminus \{l\}$.

Si $lim\, u_n = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = L\ (L \in \mathbb{R})$ alors $lim\left(f\left(u_n\right)\right) = L$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \in I,\ \left(n \geq p \Rightarrow \left|f(u_n) - L\right| < \varepsilon\right)$. On a $\lim\limits_{x \to l} f(x) = L$ donc

$il\ existe\ \alpha > 0\ tel\ que\ \forall x \in J,\ 0 < |x - l| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ **(1)**

Puisque $lim\, u_n = l$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I,\ \left(n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \alpha\right)$

Alors pour $n \geq p$ on a $|u_n - l| < \alpha$ et on a aussi par hypothèse $u_n \in J \setminus \{l\}$

Ce qui permet d'écrire $0 < |u_n - l| < \alpha$ pour $n \geq p$.

Et d'après **(1)**, on obtient $|f(u_n) - L| < \varepsilon$. En conclusion

$\forall \varepsilon > 0, il\ existe\ p \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n \in I,\ \left(n \geq p \Rightarrow |f(u_n) - L| < \varepsilon\right)$

D'où $lim\, f(u_n) = L$

Remarque

Le théorème précédent reste valable si l ou L est infinie

Conséquence

Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = l$

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - x + 1 = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty \Rightarrow \lim 3n^2 - n + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\sin X}{X} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

IV. Convergence des suites monotones

Théorème 9(Admis) (utile pour justifier la convergence)

Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle est convergente et elle converge vers un réel l vérifiant $u_n \leq l$ à partir d'un certain rang.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée est convergente et elle converge vers un réel l vérifiant $u_n \geq l$ à partir d'un certain rang.

Théorème 10

Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Démonstration

❖ Soit $A > 0$, montrons que $u_n > A$ à partir d'un certain rang.

(u_n) n'est pas majorée donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > A$

Or la suite (u_n) est croissante donc pour tout entier

$n \in I,\ n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p > A$

❖ Soit $A < 0$, montrons que $u_n < A$ à partir d'un certain rang.

(u_n) n'est pas minorée donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p < A$

Or la suite (u_n) est décroissante $\forall n \in I,\ n \geq p \Rightarrow u_n \leq u_p < A$

Théorème 11 (utile pour le calcul de la limite si elle existe)

Soit f une fonction continue sur un intervalle J et (u_n) une suite à valeurs dans J qui converge vers un réel l.

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et $l \in J$ alors $f(l)=l$

Démonstration

On a $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$

Et comme f est continue en l alors $\lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = f(l)$

Donc d'après l'unicité de la limite on a $f(l)=l$.

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

1) On procède par récurrence

Pour n=0 , l'encadrement est vrai car $u_0 = 1 \in [1,2]$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \le u_n \le 2$ et montrons que $1 \le u_{n+1} \le 2$.

$1 \le u_n \le 2 \Leftrightarrow 3 \le 2+u_n \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} \le \sqrt{2+u_n} \le \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 2$

2) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n} = \dfrac{(u_n-2)(-u_n-1)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$

Et d'après 1) $1 \le u_n \le 2 \Rightarrow u_n - 2 \le 0,\quad -u_n - 1 < 0$ et $\sqrt{2+u_n} + u_n > 0$

Ce qui prouve bien que $u_{n+1} - u_n \ge 0$ et la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto \sqrt{2+x} \\ (u_n) \text{ converge vers } l \\ f \text{ continue sur } [-2,+\infty[\text{ et en particulier sur } [1{,}2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,2] \text{ donc } l \in [1,2] \end{cases}$$

Donc $f(l) = l$

$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{2+l} = l \Leftrightarrow l^2 = 2 + l$ et $l \ge 0 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0$ et $l \ge 0$

la solution positive de l'équation $l^2 - l - 2 = 0$ est 2 donc $\lim u_n = 2$.

IV. Suites adjacentes

Définition

On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- ❖ Pour tout entier $n \in I,\ u_n \le v_n$
- ❖ (u_n) croissante et (v_n) décroissante
- ❖ $\lim(v_n - u_n) = 0$

Théorème

Si deux suites réelles sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration

(u_n) est croissante donc $u_{n_0} \le u_n$ et $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge n_0$ $(n \in I)$

Donc $\forall n \in I,\ u_{n_0} \le v_n$ c.-à-d. (v_n) est minorée par u_{n_0}

Et puisque (v_n) est minorée et décroissante alors elle est convergente

(v_n) est décroissante donc $v_n \le v_{n_0}$ et $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge n_0$ $(n \in I)$

Donc $\forall n \in I,\ u_n \le v_{n_0}$ c.-à-d. (u_n) est majorée par v_{n_0}

Et puisque (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente

En plus on a $lim(v_n - u_n) = 0$ donc $lim\, u_n = lim\, v_n$

Exercice

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $w_n = u_n - v_n$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique

b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ \mathrm{u_n} \ge v_n$.

2) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite l .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que (t_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de l.

Solution

1) a) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \dfrac{u_n - v_n}{12} = \dfrac{1}{12} w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = 11$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 q^n = 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ge 0$ donc $u_n \ge v_n$.

2)

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \dfrac{-2u_n + 2v_n}{3} = -\dfrac{2}{3}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{3} w_n \le 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4} w_n \ge 0$ donc la suite (v_n) est croissante.
- (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12} \in \left]-1, 1\right[$ donc $lim\, w_n = lim(u_n - v_n) = 0$.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n \\ (v_n)\text{ croissante et } (u_n) \text{ décroissante} \\ lim(u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$ donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite l

3) a) $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n$

Donc (t_n) est une suite constante.

b) (t_n) est constante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 3u_n + 8v_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$.

Par passage à la limite on trouve $11l = 44$ donc $l = \dfrac{44}{11} = 4$.

Ce cours que j'ai conçu est destiné aux élèves des classes terminales section mathématique conformément aux programmes officiels Tunisien.

Vos suggestions et vos remarques m'intéresse beaucoup et seront les bienvenus sur mon email dhaouadi.nejib@gmail.com