1) ORIENTATION DU PLAN

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif) .

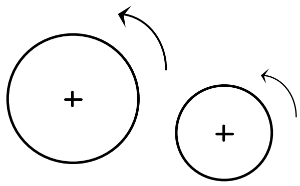
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.

L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.

(appelé aussi **sens trigonométrique**)

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

2) ARCS ORIENTES

A) DEFINITION

Soit (A, B) un couple de points d'un cercle **orienté** ζ .

Il ya deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B. un et un seul de ces deux arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle, on l'appelle **arc orienté** d'origine A et d'extrémité B, qu'on note $\overset{\frown}{AB}$

Remarque : Tout arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$

B) MESURES ALGEBRIQUES D'UN ARC ORIENTE

ζ est un cercle orienté de rayon 1.

(A, B) un couple de points distincts de ζ .

L est la longueur de l'arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$. $L = r \times \theta$. Où **r = 1** et $\theta = \widehat{AOB}$.

Soit M un point mobile qui se déplace sur ζ de A vers B.

Si le sens est direct alors une mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est L + $2n\pi$. Où $n \in \mathbb{N}$	Si le sens est indirect alors une mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est L + $2m\pi$. Où $m \in \mathbb{Z}_-$

On appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ et on note mes $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

On convient que mes $\overset{\frown}{AB}$ = $2k\pi$, si et seulement si A = B .

Conséquences :

ζ est un cercle orienté de rayon 1. (A, B) un couple de points distincts de ζ .

- x et y sont deux mesures de $\overset{\frown}{AB}$, si et seulement si, $x - y = 2k\pi$.
- L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
- Pour tout point A de ζ et pour tout réel x, il existe un point unique B de ζ tel que mes $\overset{\frown}{AB}$ = x.

Notation :

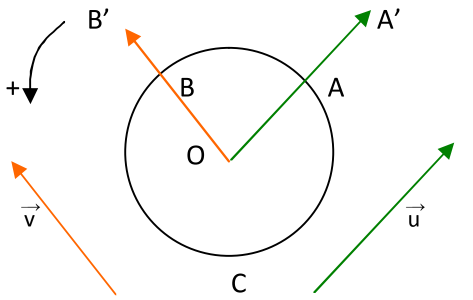
$x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est notée $x \underbrace{\equiv}_{\text{congrus}} y \underbrace{[2\pi]}_{\text{modulo } 2\pi}$

Activité 2 page 29 :

3) ANGLES ORIENTES DE DEUX VECTEURS NON NULS

A) ENSEMBLE DES MESURES

Le plan étant orienté dans le sens direct. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls.



On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$.

Les demi-droites [OA') et [OB') coupent le cercle trigonométrique C respectivement en A et en B .

Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires,

respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux .

On définit les mesures en radian de l'angle orienté de vecteurs **unitaires** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ à partir de celles de **l'arc orienté** $\overset{\frown}{AB}$ ...

Les mesures en radians de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ c'est à dire , celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$. Il en résulte que si x est une mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) , alors les autres mesures sont de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notation :

- La notation usuelle est $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion , on notera seulement ($\vec{u}$, $\vec{v}$) cet angle orienté.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.
  On écrit, par exemple, $\mathbf{(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}}$ signifiant qu'**une** mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit aussi $\mathbf{(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ **, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore** $\mathbf{(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$

B) MESURE PRINCIPALE

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) appartient à l'intervalle] -π ; π] ; On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

Remarque :

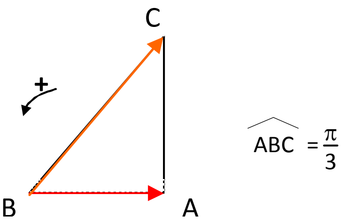
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Ex :

La mesure principale de ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$) est

La mesure principale de ($\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$) est et $\widehat{ACB}$ =

La mesure principale de ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est et $\widehat{BAC}$ =



C) ANGLE NUL, ANGLE PLAT, ANGLES DROITS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que :

Angle nul : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à 0 *($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens)*

ou

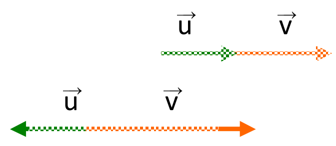
Angle plat : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à π *($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire)*

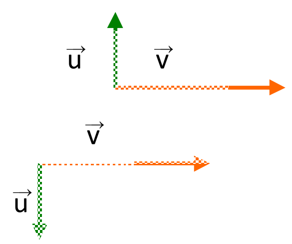
- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que :

Angle droit direct : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à $\frac{\pi}{2}$

ou

Angle droit indirect : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à $-\frac{\pi}{2}$





Rem : Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, ($\vec{u}$, $\vec{u}$) = 0 et ($\vec{u}$, $-\vec{u}$) = π

4) PROPRIETES DES MESURES DES ANGLES ORIENTES DE VECTEURS

A) RELATION DE CHASLES

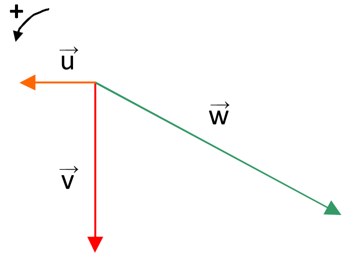
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté . On a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

En additionnant n'importe quelle mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) à n'importe quelle mesure de ($\vec{v}$, $\vec{w}$) , on obtient une mesure de ($\vec{u}$, $\vec{w}$) .

Réciproquement, n'importe quelle mesure de ($\vec{u}$, $\vec{w}$) est la somme d'une mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et d'une mesure de ($\vec{v}$, $\vec{w}$) .

Ex : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que



$(\vec{u}, \vec{w}) = \dfrac{5\pi}{6}$ et $(\vec{w}, \vec{v}) = -\dfrac{\pi}{3}$

D'après la relation de Chasles $(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

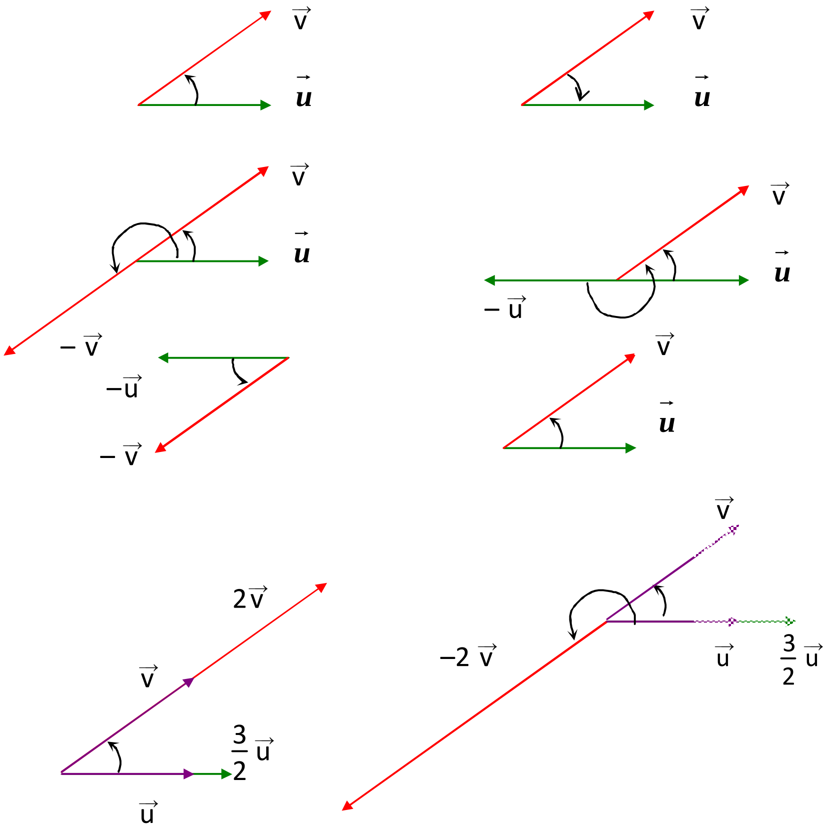
On en déduit donc que $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \ldots = \dfrac{\pi}{2}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux.

B) CONSEQUENCES DE LA RELATION DE CHASLES

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$
$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$
Soit k et k' deux réels non nuls : ▪ si k et k' sont de même signe, alors : $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ ▪ si k et k' sont de signes contraires, alors : $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



Preuve :

1) D'après la relation de Chasles $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u})$

Or $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$; donc $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$

2) D'après la relation de Chasles $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v})$

Or $(\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$; donc $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ …

3) D'après la relation de Chasles $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{u}) + (-\vec{u}, -\vec{v}) + (-\vec{v}, \vec{v})$

$= \pi + (-\vec{u}, -\vec{v}) + \pi = 2\pi + (-\vec{u}, -\vec{v})$

Les mesures sont définis modulo 2π , donc $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

4)

- Si k et k' sont de même signe , le résultat découle de la définition …
- Si k et k' sont de signes contraires :
  D'après la relation de Chasles , on peut écrire : $(k\vec{u} , k'\vec{v}) = (k\vec{u} , k\vec{v}) + (k\vec{v} , k'\vec{v})$

  $(k\vec{u} , k\vec{v}) = (\vec{u} , \vec{v})$ d'après le résultat précédent .

  $k\vec{v}$ et $k'\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, donc $(k\vec{v} , k'\vec{v}) = \pi$

  On en déduit le résultat.

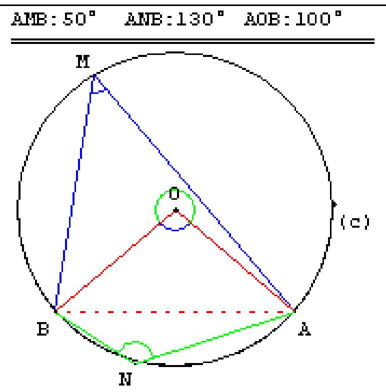
Activités 6, 7, 8, 9 page 36 :

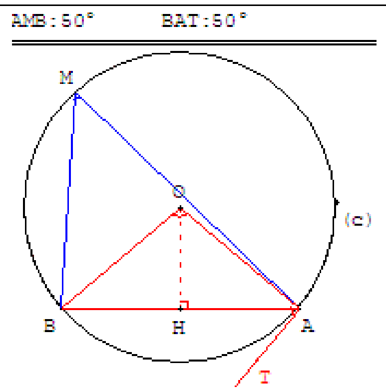
5) CERCLE ET ANGLES

A) ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

Définition :

Un angle est inscrit dans un cercle lorsque son sommet appartient à ce cercle et ses côtés recoupent ce cercle ; l'un de ses côtés peut être tangent au cercle.





$\widehat{AOB}$ est un angle au centre associé à chacun des angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$	$\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{TAB}$

Théorème n°1 :

ζ est un cercle de centre O dans le plan orienté dans le sens direct.

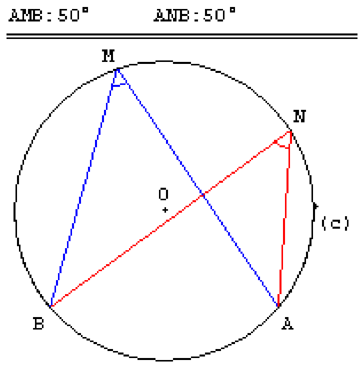
- Pour tous points A, M et B de ζ , on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.
- Si (AT) et tangente à ζ en A, alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$.

Théorème n°2 :

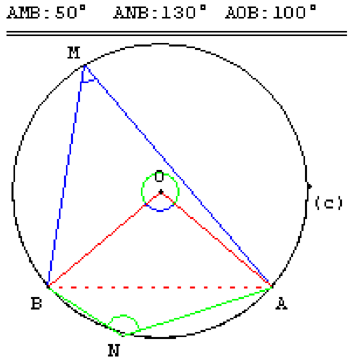
ζ est un cercle dans le plan orienté dans le sens direct.

A, B, M et N quatre points distincts de ζ .

- Si M et N appartiennent à l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, alors $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}\right)[2\pi]$.



- Si M $\in \overset{\frown}{AB}$ et N$\in \overset{\frown}{BA}$, alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}\right)+\pi[2\pi]$.



Activité 3 page 38 :

B) ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE : $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\theta[2\pi]$, $\theta\neq k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Activité :

A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct.

[At) est la demi droite telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{At},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Construire le cercle ζ passant par A et B et tangent à [At).
2) Soit M un point de l'arc orienté $\overset{\frown}{BA}$, déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$.

Théorème :

Le plan étant orienté dans le sens direct.
A et B sont deux points distincts du plan, θ est un réel différent de $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\theta[2\pi]$ est l'arc d'un cercle ζ passant par A et B, tangent à la demi droite [At), telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{At},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\theta[2\pi]$; l'arc est situé dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas [At) et il est privé des points A et B.

Activités 2 et 3 page 39 :

6) REPERE ORTHONORME

Définition :

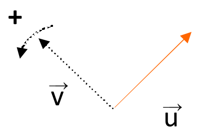
Un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est :

- **direct** , si l'une des mesures de $(\vec{i}\,,\vec{j})$ est $+\frac{\pi}{2}$
- **indirect** , si l'une des mesures de $(\vec{i}\,,\vec{j})$ est $-\frac{\pi}{2}$

Ex : Repère orthonormé direct | Repère orthonormé indirect

Remarque :

- On définit de la même façon une base orthonormée directe …
- Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$, il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}\,,\vec{v})$ soit une base orthonormée directe.



Déterminant de deux vecteurs :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soit $\vec{u}'$ le vecteur vérifiant : $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \\ et \\ \widehat{(\vec{u},\vec{u}')} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ et on note dét $(\vec{u}\,,\vec{v})$ le réel $\vec{v}\,.\,\vec{u}'$.

On convient que si l'un des vecteurs est nul, leur déterminant est nul.

Remarques :

- dét $(\vec{u}\,,\vec{v}) = -$ dét $(\vec{v},\vec{u})$.
- dét $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est une base orthonormée directe alors dét $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1$.
- Si $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est une base orthonormée indirecte alors dét $(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1$.

Activité 6 page 41 :