2ème Sciences

CH7 – Analyse : Fonctions homographiques du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $c\neq 0$

Mars 2010
A. LAATAOUI

• Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{a}{x}$:

Etude et représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$:

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

- Quel est le domaine de définition de f ? ……………………………………………………………………
- Etudier la parité de f. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- Compléter chacun des tableaux suivants :

x	10^2	10^6	10^{12}	10^{14}
$f(x)$				

x	-10^2	-10^6	-10^{12}	-10^{14}
$f(x)$				

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$				

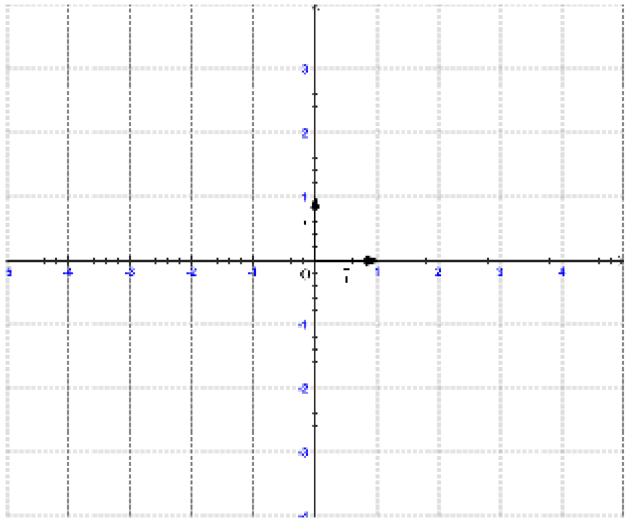
x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001
$f(x)$				

Que peut on conclure ?
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
Interprétation graphique des limites :
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ alors C_f admet la droite d'équation y = 0 comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ alors ……………………………………………………………………………
Si $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ alors C_f admet la droite d'équation x = 0 comme asymptote verticale.

- Dresser le tableau de variation de f.

- Compléter le tableau de valeurs suivant, puis tracer la courbe représentative de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$						



……
……..

- Soit $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$.

  Tracer la courbe représentative de g dans le même repère, puis donner le tableau de variation de g.

Activités 23 page 59.

Exercice n°1 :

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$f(x) = 4x^2$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{1}{2x}$ si $\frac{1}{2} < x$.

Donner le tableau de variations de f, en précisant son comportement pour les grandes valeurs de x.

Exercice n°2 :

1) Représenter sur un même graphique la droite D : y = x + 1 et l'hyperbole H d'équation $y = \frac{2}{x}$, en précisant les coordonnées des points d'intersection.

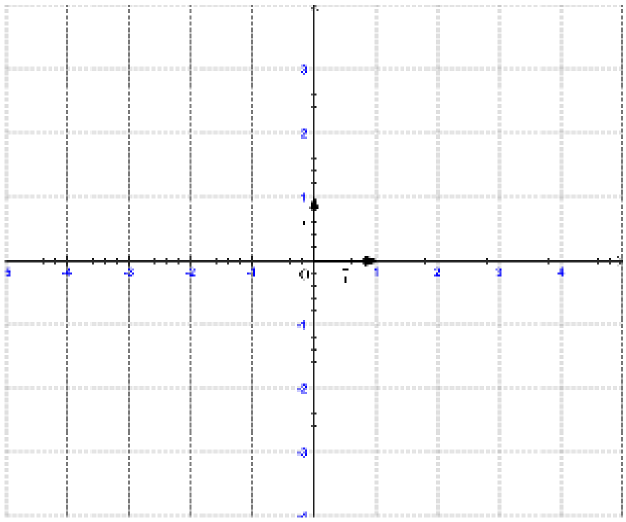
2) A l'aide de ce graphique, dresser le tableau de signe de la fonction f définie sur IR^* par : $f(x) = \frac{2}{x} - x - 1$

- ## ***Fonctions du type*** $x \mapsto \dfrac{a}{x+b}$ **:**

<u>*Exemple :*</u>

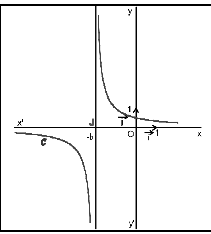
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

1) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f représentative de la fonction f .



2) Soit la fonction g définie par : $g : x \mapsto \dfrac{2}{x-3}$.

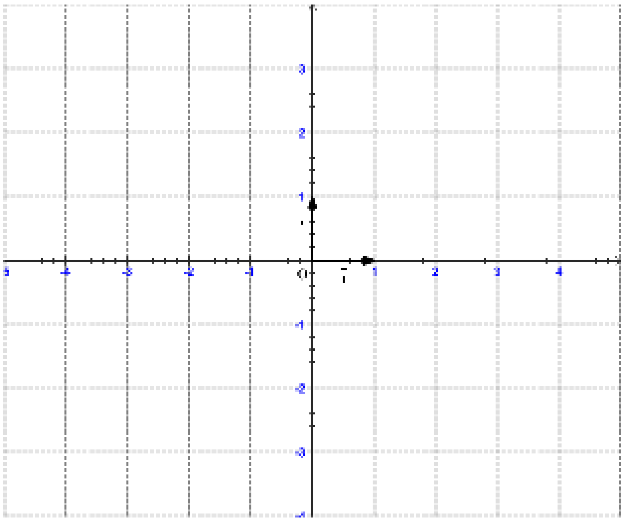
- Déterminer le domaine de définition de g :
  ……………………………………………………………………………………………………
- Etudier les variations de g sur chacun des intervalles $]-\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- Montrer que $(C_g) = t_{3\vec{i}}(C_f)$
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- Tracer (C_g) dans le même repère que celle de (C_f). Donner sa nature et ses éléments caractéristiques.
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- Déduire à partir du graphique le tableau de variation de g.

La représentation graphique de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{a}{x+b}$ est une hyperbole de centre de symétrie le point J (-b, 0) , d'asymptotes les droites d'équations respectives x = -b et y = 0	

- **Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$:**

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = -\dfrac{2}{x+1}$.

   Tracer ζ_f, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.



2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

   a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $g(x) = 2 - \dfrac{2}{x+1}$.

   ………..

   b) Donner alors une transformation du plan qui permet de tracer ζ_g à partir de ζ_f dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Préciser la nature de ζ_g et ses éléments caractéristiques. En déduire le tableau de variation de g.

   ………
   ………
   ………
   ………
   ………
   ………

3. a) Résoudre l'équation : $g(x) = 2x - 1$.

   ………
   ………
   ………
   ………

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{2x}{x+1} - 2x + 1 \leq 0$.

   ………
   ………
   ………
   ………

On admet que la courbe représentative de f : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $c \neq 0$ est une hyperbole (H) de centre de symétrie le point $W\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$, d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$