

Limites et asymptotes

Soit f une fonction

➤ **Limite infinie en l'infini :**

Lorsque $f(x)$ peut être rendu supérieur à tout réel positif A pour x suffisamment grand, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On définit de manière similaire :

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ($f(x)$ devient inférieur à $-A$)

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (x doit être suffisamment grand en valeur absolue mais négatif)

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty ; n \in \mathbb{N}^*$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est un entier positif pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est un entier positif impair} \end{cases}$$

➤ **Limite finie en l'infini :**

Lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche qu'on le désire d'un réel L pour x suffisamment grand, on dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

On définit de manière similaire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; n \in \mathbb{N}^*$$

➤ **Asymptotes horizontales :**

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, la courbe représentative de f admet

la droite d'équation $y = L$ comme asymptote horizontale ; cela signifie que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = L$.

➤ **Asymptotes verticales :**

Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$; ($x_0 \in \mathbb{R}$), la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale ; cela signifie que lorsque x tend vers x_0 , la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $x = x_0$.

➤ **Asymptotes obliques :**

Soit f une fonction et (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$; ($a, b \in \mathbb{R}^2$) ; on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (ξ_f) au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$; ($a, b \in \mathbb{R}^2$) ; on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (ξ_f) au voisinage de $-\infty$.

➤ **Limites et opérations :**

❶ **Sommes :**

Limite de f	L_1	L_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(f + g)$	$L_1 + L_2$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

❷ **Produits :**

Limite de f	L_1	$L_1 \neq 0$	$\pm\infty$	0
Limite de g	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Limite de $(f \times g)$	$L_1 \times L_2$	$\pm\infty$ (règles des signes)	$\pm\infty$ (règles des signes)	F.I

③ Quotients :

Limite de f	L_1	L_1	$\pm\infty$	$L_1 \neq 0$	$\pm\infty$	0
Limite de g	$L_2 \neq 0$	$\pm\infty$	L_2	0	$\pm\infty$	0
Limite de $\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{L_1}{L_2}$	0	$\pm\infty$ (règles des signes)	$\pm\infty$ (règles des signes)	F.I	F.I

Exercice N° 01 :

Limites en ∞ :

- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$
- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 2007}{x^2 + x}$
- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + x + 1} - x \right)$
- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{x + 1} \right)$
- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x^2}{2x + 1} - \frac{(2x - 1)(3x^2 + x + 2)}{4x^2} \right]$
- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x + 1)^{10} + (x + 2)^{10} + \dots + (x + 100)^{10}}{x^{10} + 100^{100}}$
- ★ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \right)$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-4}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1} - 2x \right)$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+5}} - x \right)$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x} \right)$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3} \right)$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + 2x - \sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2+x} + 7}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2} \right)$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)$$

Exercice N° 02 :

Limites en $a, (a \in \mathbb{R}) :$

$$\star \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{7 - 3x}}}{1 - \sqrt{2 - \sqrt{\frac{1}{5 - 2x}}}}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 2x}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

Exercice N° 03 :

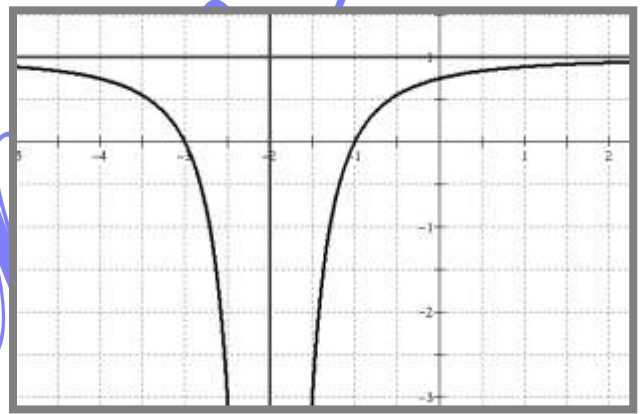
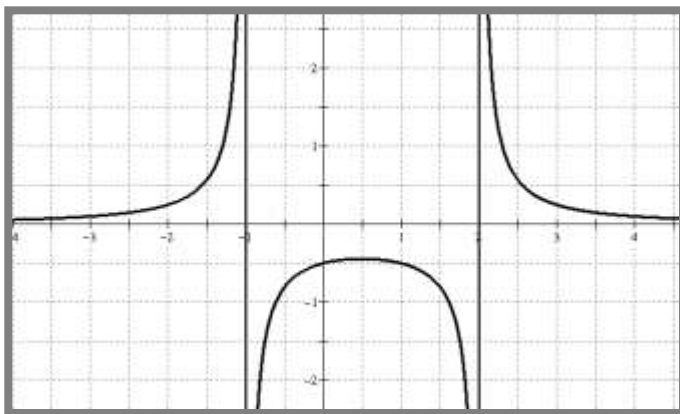
Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique (ξ) de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est ce que qui permet d'éliminer les deux autres)

1^{er} cas :

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

2^{ème} cas :

$$g_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} \quad ; \quad g_3(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$



Exercice N° 04 :

Trouver les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

- ❶ $f(x) = \frac{3x-1}{x}$; ❷ $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; ❸ $f(x) = \frac{1}{x+2}$
 ❹ $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$; ❺ $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$; ❻ $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

Exercice N° 05 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x + 3}$

1/ Déterminer D_f (le domaine de définition de f)

2/ Déterminer trois réels a, b et c tels que pour $x \in D_f$, on a :

$$f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x + 3}$$

3/ Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x); \lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax^2 + b)]$$

4/ Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 4$

a) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x

b) En déduire les positions relatives de (ξ_f) et (ξ_g) .

c) Construire (ξ_f) et (ξ_g) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice N° 06 :

soit $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(1;0)$, $M(\cos(x); \sin(x))$, $P(\cos(x); 0)$ et $T(1; \tan(x))$. Soit \mathcal{A}_1 l'aire du triangle OAM , \mathcal{A}_2 l'aire du secteur de disque OAM et \mathcal{A}_3 l'aire du triangle OAT .

1/ En comparant ces aires, prouver que :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

2/ En déduire que $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$

3/ Déterminer la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0

(étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$)

