

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Exercice 1

Démontrer que si les deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires alors leur déterminant est nul.

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle, D et E les points tels que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note I le milieu de $[DE]$.

- a. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
 - b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 - c. Démontrer que les points A , A' et I sont alignés.
2. Démontrer que le point G est le milieu de $[AI]$.
 3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 3

Soit un triangle ABC .

1. Construire les points D et E vérifiant : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire géométriquement ?
3. Montrer que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CA}$. Déduire de cette égalité et de la précédente que E , B et D sont alignés.
4. Soit I le milieu de $[AB]$. Justifier que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$. Qu'en déduire pour les droites (AE) et (CI) ?

Exercice 4

1. En utilisant les informations données sur le dessin, déterminer une équation de chacune des droites ci-dessous (on donnera des valeurs exactes, pas de justification).

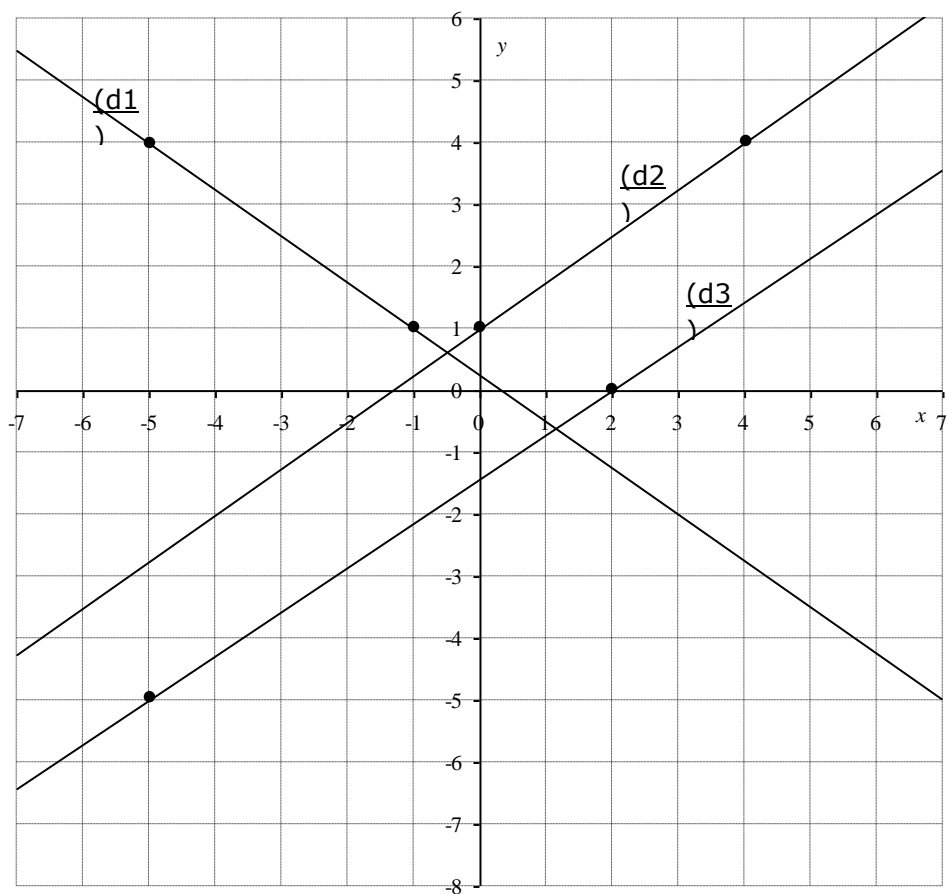
(d1) :

(d2) :

(d3) :

2. Les droites (d2) et (d3) sont elles parallèles ?

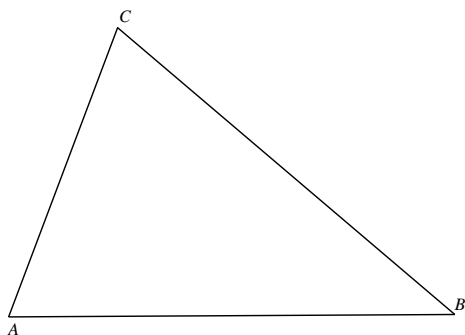
Pourquoi ?



Exercice 5

Le but de l'exercice est de construire un triangle $A'B'C'$ à l'intérieur d'un triangle ABC de sorte que

- A' est le milieu de $[BC']$,
- B' est le milieu de $[CA']$,
- C' est le milieu de $[AB']$.



On choisit le repère $(A; \overline{AB}, \overline{AC})$: les coordonnées de A sont donc $(0 ; 0)$, celles de B $(1 ; 0)$ et celles de C $(0 ; 1)$. On pose les coordonnées de A' : $(a ; a')$, celles de B' $(b ; b')$ et celles de C' : $(c ; c')$.

1. a. Montrez que $\begin{cases} c+1=2a \\ c'=2a' \end{cases}$ puisque $\begin{cases} a=2b \\ a'+1=2b' \end{cases}$ et $\begin{cases} b=2c \\ b'=2c' \end{cases}$.

b. Résoudre le système d'inconnues a, b et c : $\begin{cases} c+1=2a \\ a=2b \\ b=2c \end{cases}$.

c. Résoudre un système similaire d'inconnues a', b' et c' .

2. A l'aide des résultats précédents montrez les relations suivantes :

$$\overline{AA'} = \frac{4}{7} \overline{AB} + \frac{1}{7} \overline{AC}$$

$$\overline{AB'} = \frac{2}{7} \overline{AB} + \frac{4}{7} \overline{AC}$$

$$\overline{AC'} = \frac{1}{7} \overline{AB} + \frac{2}{7} \overline{AC}$$

3. Utilisez ces relations pour construire les points A', B' et C' sur la figure jointe (les vecteurs de construction doivent apparaître).

4. Vérifiez que $\overline{AC'} = \overline{C'B'}$ à l'aide des relations du 2. Qu'en concluez-vous ? Ecrivez deux autres relations que vous pourriez obtenir de la même manière.

5. Curieusement les triangles ABC et $A'B'C'$ ont l'air semblables sur la figure. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6

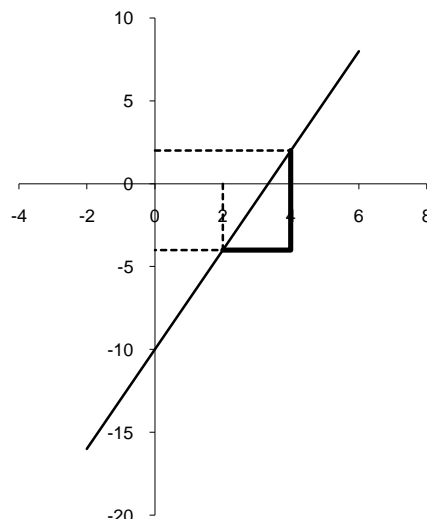
Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $A(2 ; -4)$ et $B(4 ; 2)$

a. Tracez la droite (AB) et expliquez comment obtenir une équation de cette droite par simple lecture graphique.

b. Déterminez par le calcul une équation de la droite (AB) .

c. Déterminez une équation de la droite (D) parallèle à (AB) et passant par le point $C(0 ; 3)$.

d. Déterminez une équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC .



Exercice 7

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(4; -2)$, $B(-4; -1)$, $C(2; 8)$ et $H(-2; 2)$.

1. Faire une figure et montrer que les points B , C et H sont alignés.
2.
 - a. Calculer les distances AH , BH et AB .
 - b. Démontrer que le triangle AHB est rectangle en H .
3. Calculer l'aire du triangle ABC .
4. Soit (D) la droite qui passe par A et qui est parallèle à (BC) .
 - a. Déterminer le coefficient directeur de (BC) ou un vecteur directeur de (BC) .
 - b. Déterminer une équation de (D) .
 - c. Le point $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$ appartient-il à (D) ?
 - d. Quelle est l'aire du triangle BCE ?

Exercice 8

On définit trois droites de la manière suivante :

- * (D_1) passe par $A(-4; -1)$ et a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$;
- * (D_2) passe par $B(0; 2)$ et $C(3; 0)$;
- * (D_3) est parallèle à l'axe (Oy) et passe par C .

1. Représenter ces trois droites.
2. Ecrire une équation de chacune de ces droites.
3. Déterminer leur(s) point(s) d'intersection deux à deux. Sont-elles concourantes ?

Exercice 9

(Tous les résultats devront être justifiés par calcul !)

Placer dans un repère orthonormal les points $A(0; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(-2; 5)$.

1. A est-il sur la médiatrice de $[BC]$?
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Quelles doivent être les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un carré ? Placer D .
4. Montrer que I , le milieu de $[AB]$, appartient au cercle de centre C et de rayon 5. Placer I .

5. Soit les points $E(2000 ; 1000)$ et $F(2000 ; 1001)$. Lequel de ces deux points appartient à la droite (AB) ?

6. Soit $G(3996 ; 2004)$ et $H(3996 ; 2005)$. Laquelle des droites (CG) ou (CH) est parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 10

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on place le carré $OCBA$ où A a pour coordonnées $(0 ; 4)$, $B(4 ; 4)$ et $C(4 ; 0)$.

1. E le milieu de $[BC]$ et F le point tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CO}$; montrer que les coordonnées de E sont $(4 ; 2)$ et celles de $F(-2 ; 0)$.

2. Calculer les longueurs AE , AF et FE ; montrer que le triangle AFE est rectangle isocèle.

3. Soit (d) la droite passant par O et parallèle à (AE) et (d') la droite (BF) . Déterminer une équation de (d) et une équation de (d') ; calculer les coordonnées de leur point d'intersection I . Tracer (d) et (d') et contrôler graphiquement votre résultat.

4. On admet que I a pour coordonnées $\left(-\frac{8}{7} ; \frac{4}{7}\right)$. Soit G le point d'ordonnée négative tel que le triangle OFG soit rectangle isocèle de sommet F . Placer G sur la figure ; déterminer les coordonnées de G et prouver que les points A , I et G sont alignés.

Exercice 11

Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et trois points A , B et C définis ci-dessous.

1. La droite (AB) a pour équation $y = x + 3$; la droite (AC) a pour équation $x + 2y + 6 = 0$; les points B et C ont respectivement pour ordonnées 5 et -4 .

B' est le milieu de $[AC]$.

Déterminez les coordonnées des points A , B , C et B' .

2. Donnez les équations réduites de (AC) et (BC) . Représentez les droites (AC) , (BC) et (AB) .

3. Calculez les coordonnées du point D de sorte que $ABCD$ soit un parallélogramme.

4. Déterminez une équation de la droite (d) parallèle à (AB) passant par B' et les coordonnées des points d'intersection de (d) avec les axes.

5. Quel est le centre de gravité du triangle ABC ?

6. (d) et (AD) se coupent en E . (d) et (BC) se coupent en F . Donnez les coordonnées de E et F . Quelle est la nature du quadrilatère $ABFE$?

7. Calculez les coordonnées de G , centre de gravité du triangle ADC , et déterminez le réel k tel que le point G appartienne à la droite (d') d'équation : $3x - y + k = 0$.

8. Représenter graphiquement, en précisant bien les bords, l'ensemble des points M dont les

$$\text{coordonnées sont solutions du système : } \begin{cases} x-y+3 > 0 \\ x+2y+6 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

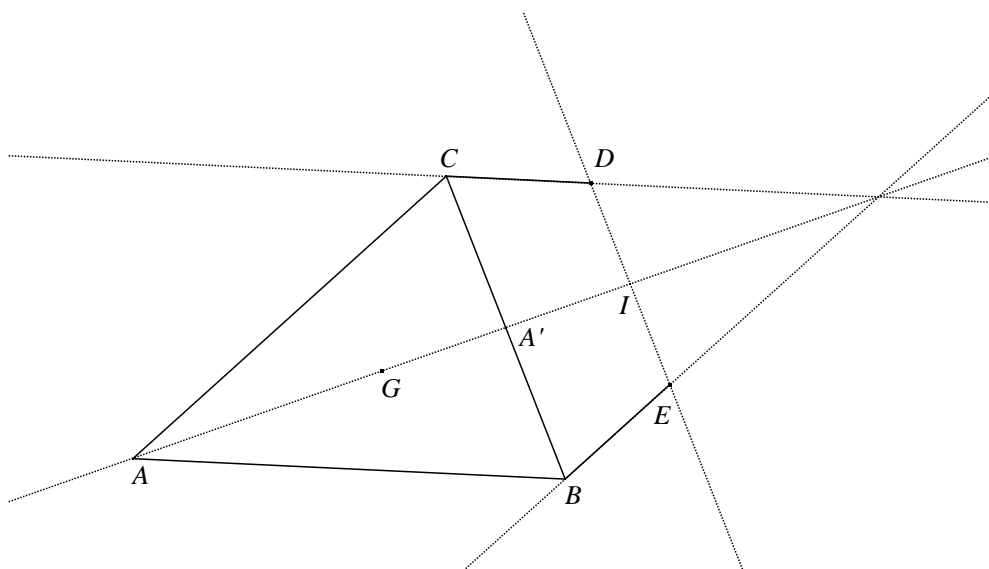
Exercice 1: Correction

Prenons deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ colinéaires. Par définition de la colinéarité, il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

On a donc : $x' = kx$ et $y' = ky$. Calculons, le déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = xky - kxy = kxy - kxy = 0.$$

Exercice 2 : Correction



1. a. Prenons le repère $(A; \overline{AB}, \overline{AC})$ où A a pour coordonnées $(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$. Des données de construction on tire que $E\left(1; \frac{1}{3}\right)$ et $D\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, soit $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ou encore $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}$.

b. Les coordonnées de A' sont $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overline{AA'} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$.

c. Faisons le déterminant des vecteurs : $\det(\overline{AA'}, \overline{AI}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 0$; on pouvait également remarquer que $2\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{AC} = \frac{3}{2}\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{4}{3}\overline{AA'}$.

2. Les coordonnées de G sont $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ d'où $\overline{AI} = 2\overline{AG}$ et G est le milieu de $[AI]$.

3. $\det(\overline{BC}, \overline{ED}) = \begin{vmatrix} 0-1 & \frac{1}{3}-1 \\ 1-0 & 1-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Exercice 3 : Correction

1. facile !

$$2. \overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{BC} + 2\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{BA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

On en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

$$3. \overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AE} = \overline{BA} + \overline{CB} + \overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{CA} = \overline{CA} + \overline{CA} = 2\overline{CA}.$$

On en déduit que $\overline{BE} = 2\overline{CA} = -2\overline{AC} = -2\overline{BD}$: \overline{BE} et \overline{BD} sont donc colinéaires, les points E , B et D sont alignés.

$$4. \text{ Comme } I \text{ est le milieu de } [AB], \text{ on a : } \overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}.$$

$$\text{D'où } \overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CI} + \overline{IA} + \overline{CI} + \overline{IB} = 2\overline{CI} + \overline{IA} + \overline{IB} = 2\overline{CI}.$$

On en déduit que, comme $\overline{AE} = \overline{CB} + \overline{CA} = \overline{CA} + \overline{CB}$, alors $\overline{AE} = 2\overline{CI}$. Si bien que \overline{AE} et \overline{CI} sont colinéaires. Les droites (AE) et (CI) sont parallèles.

Exercice 4 : Correction

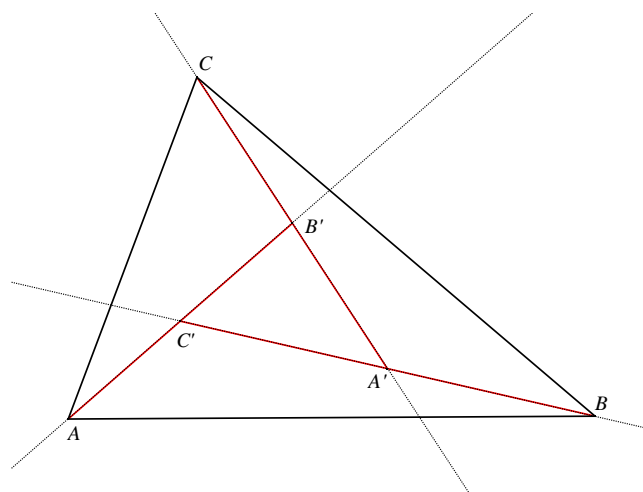
$$1. (d1) : \text{ passe par } (-5 ; 4) \text{ et } (-1 ; 1), \text{ équation : } \begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-4 & -3 \end{vmatrix} = -3x-15-4y+16=0 \Leftrightarrow 4y+3x-1=0.$$

$$(d2) : \text{ passe par } (4 ; 4) \text{ et } (0 ; 1), \text{ coeff. directeur } \frac{3}{4}, \text{ ordonnée à l'origine : } 1, \text{ équation : } \\ y = \frac{3}{4}x + 1.$$

$$(d3) : \text{ passe par } (-5 ; -5) \text{ et } (2 ; 0), \text{ coeff. directeur } \frac{5}{7}, 0 = \frac{5}{7} \cdot 2 + p \Rightarrow p = -\frac{10}{7}, \text{ équation : } \\ y = \frac{5}{7}x - \frac{10}{7}.$$

2. Les droites $(d2)$ et $(d3)$ ne sont pas parallèles : elles n'ont pas le même coefficient directeur.

Exercice 5 : Correction



$$1. a. A' \text{ est le milieu de } [BC'] \text{ donc } \begin{cases} \frac{1+c}{2} = a \\ \frac{0+c'}{2} = a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1 = 2a \\ c' = 2a' \end{cases} ; B' \text{ est le milieu de } [CA'] \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \frac{0+a}{2} = b \\ \frac{a'+1}{2} = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a'+1 = 2b' \end{cases}, \text{ enfin } C' \text{ est le milieu de } [AB'] \text{ donc } \begin{cases} \frac{0+b}{2} = c \\ \frac{0+b'}{2} = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ b' = 2c' \end{cases}.$$

$$b. \begin{cases} c+1 = 2a \\ a = 2b \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1 = 4b = 8c \\ a = 2b \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7c \\ a = 2b \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1/7 \\ a = 4/7 \\ b = 2/7 \end{cases}.$$

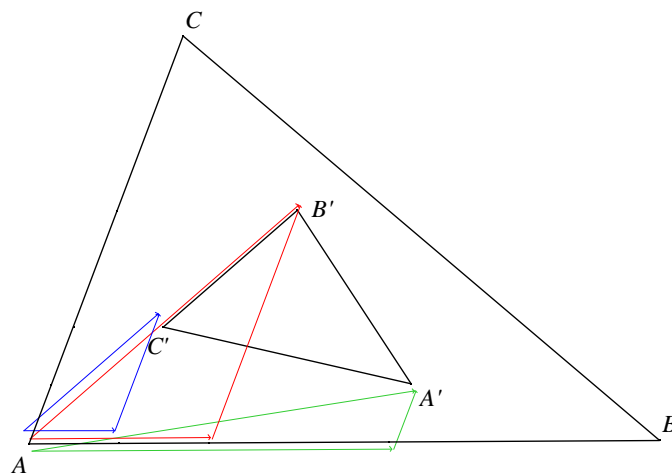
$$c. \begin{cases} c' = 2a' \\ a'+1 = 2b' \\ b' = 2c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c' = 2a' \\ a'+1 = 4c' = 8a' \\ b' = 2c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c' = 2/7 \\ a' = 1/7 \\ b' = 4/7 \end{cases}.$$

2. Les coordonnées de A' dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(\frac{4}{7}; \frac{1}{7})$, soit écrit sous forme vectorielle :

$\overrightarrow{AA'} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$. De même les coordonnées de B' sont $(\frac{2}{7}; \frac{4}{7})$ donc $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$, enfin celles de C'

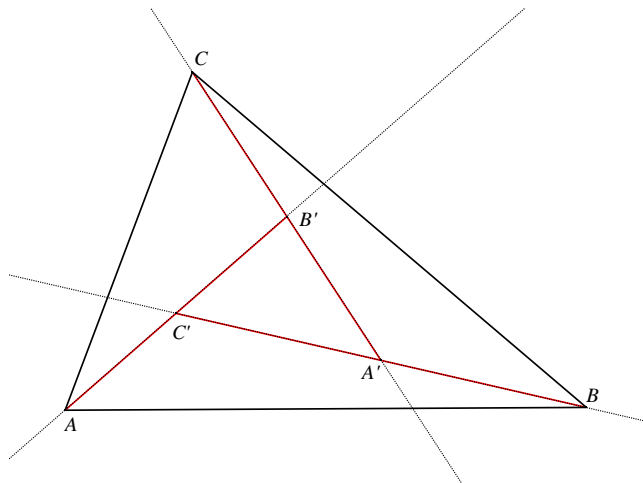
sont $(\frac{1}{7}; \frac{2}{7})$ d'où $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$.

3.



4. $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$. Ceci montre bien que C' est le milieu de $[A'B']$. On a de même $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{B'A'}$.

5. En fait ces triangles ne sont pas du tout semblables... sur la figure du début on voit bien que les angles sont différents !



Exercice 6 : Correction

a. L'ordonnée à l'origine est -10 , le coefficient directeur est indiqué par les traits gras :

$$\frac{\text{différence des } y}{\text{différence des } x} = \frac{6}{2} = 3.$$

b. $\begin{vmatrix} x-2 & 4-2 \\ y+4 & 2-(-4) \end{vmatrix} = 6(x-2) - 2(y+4) = 6x - 2y - 20 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 10 = 0.$

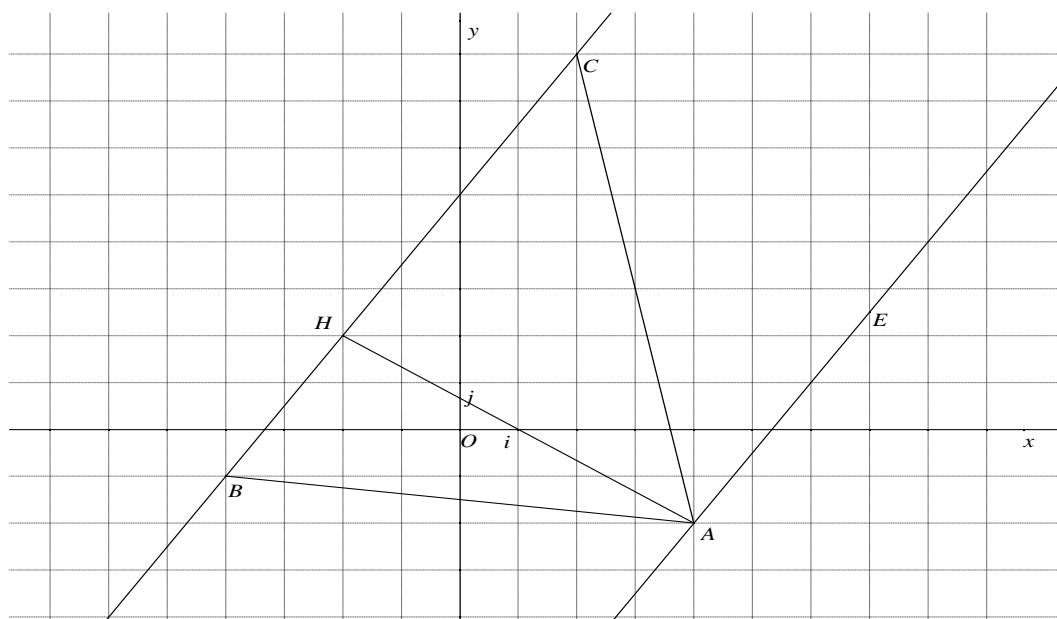
c. Même coefficient directeur 3 : $\begin{cases} y = 3x + b \\ 3 = 3 \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow y = 3x + 3.$

d. On cherche le milieu de $[BC]$, soit $I\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(2; \frac{5}{2}\right).$

Equation de la médiane (AI) :

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2-2 \\ y+4 & 5/2 - (-4) \end{vmatrix} = \frac{13}{2}(x-2) - 0(y+4) = \frac{13}{2}x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Exercice 7 : Correction



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(4; -2)$, $B(-4; -1)$, $C(2; 8)$ et $H(-2; 2)$.

1. B, C et H sont alignés : $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) = \begin{vmatrix} 2+4 & -2+4 \\ 8+1 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$.

2. a. $AH = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$, $BH = \sqrt{(-2+4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

$AB = \sqrt{(-4-4)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

b. Pythagore dans AHB : $AH^2 + BH^2 = 52 + 13 = 65 = AB^2$.

3. Le triangle ABC a pour base BC et pour hauteur AH . Il suffit donc de calculer BC :

$BC = \sqrt{(2+4)^2 + (8+1)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ d'où l'aire du triangle ABC : $\frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{52} \cdot \sqrt{117} = 39$.

4. a. Le coefficient directeur de (BC) est $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$; un vecteur directeur de (BC) est

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

b. (D) passe par A et est parallèle à (BC) donc elle a même coefficient directeur ou même vecteur directeur :

* $y = mx + p \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3/2 \\ -2 = 4 \cdot \frac{3}{2} + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3/2 \\ -8 = p \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 8$ ou bien

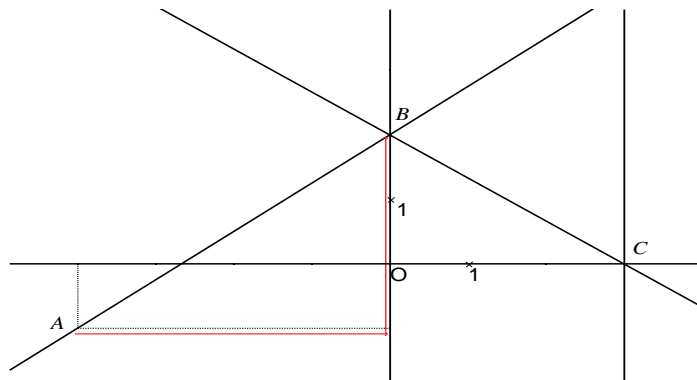
* $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} x-4 & 6 \\ y+2 & 9 \end{vmatrix} = 9(x-4) - 6(y+2) = 0 \Leftrightarrow 9x - 36 - 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 16 = 0$.

c. $E\left(7; \frac{5}{2}\right)$ appartient à (D) : $3 \cdot 7 - 2 \cdot \frac{5}{2} - 16 = 21 - 5 - 16 = 0$.

d. L'aire du triangle BCE est la même que celle du triangle ABC ... (même base BC et même hauteur AH).

Exercice 8 : Correction

1.



$$2. (D_1) : y = \frac{3}{4}x + b \text{ et } -1 = \frac{3}{4}(-4) + b \Rightarrow b = -1 + 3 = 2 ; \text{ on a donc } y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$(D_2) : \begin{vmatrix} x-0 & 3-0 \\ y-2 & 0-2 \end{vmatrix} = -2x - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0 ;$$

$$(D_3) : x = 3.$$

3. (D_2) et (D_3) se coupent en C évidemment.

$$(D_1) \text{ et } (D_3) \text{ se coupent en un point } U : x = 3 \text{ et } y = \frac{3}{4}(3) + 2 = \frac{17}{4}.$$

(D_1) et (D_2) se coupent en B : B est évidemment sur (D_2) , il est également sur (D_1) car lorsque $x = 0$, $y = \frac{3}{4} \cdot 0 + 2 = 2$.

Ces trois droites ne sont évidemment pas concourantes.

Exercice 9 : Correction

Pour le dessin, c'est facile !

On rappelle la formule de la distance entre deux points : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1. La médiatrice de $[BC]$ est l'ensemble des points équidistants des points B et C . Il suffit donc de vérifier si $AB = AC$.

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ et } AC = \sqrt{(-2-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Ainsi, $AB = AC$ et donc le point A est bien sur la médiatrice de $[BC]$.

2. D'après la question précédente, ABC est, au moins, un triangle isocèle. Serait-il, de plus, rectangle en A ?

Calculons $BC^2 = (-2-4)^2 + (5-3)^2 = 36 + 4 = 40$. De même $AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A . Par conséquent, ABC est un triangle isocèle rectangle en A .

3. Etant donné que ABC est un triangle isocèle et rectangle, il suffit de chercher les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un parallélogramme. Or, $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement

$$\text{si } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_D - x_C = x_B - x_A \\ y_D - y_C = y_B - y_A \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} x_D + 2 = 4 - 0 \\ y_D - 5 = 3 - 1 \end{cases}, \text{ ce qui donne : } \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases}.$$

Les coordonnées de D doivent être $(2;7)$.

$$4. I \text{ est le milieu de } [AB] ; \text{ ses coordonnées sont } x_I = \frac{0+4}{2} = 2 \text{ et } y_I = \frac{1+3}{2} = 2.$$

La distance IC mesure $IC = \sqrt{(2+2)^2 + (5-2)^2} = 5$. I appartient bien au cercle de centre C et de rayon 5.

5. $\det(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2000 & 4 \\ 999 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$: les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AB} ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A , E et C ne sont pas alignés. Par conséquent, E n'appartient pas à la droite (AB) .

$\det(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2000 & 4 \\ 1000 & 2 \end{vmatrix} = 4000 - 4000 = 0$: les vecteurs \overrightarrow{AF} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, les points A , F et C sont alignés, F appartient à la droite (AB) .

6. $\det(\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 3998 & 4 \\ 1999 & 2 \end{vmatrix} = 7996 - 7996 = 0$: les vecteurs \overrightarrow{CG} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, les droites (CG) et (AB) sont parallèles.

$\det(\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 3998 & 4 \\ 2000 & 2 \end{vmatrix} = 7996 - 8000 = -4 \neq 0$: les vecteurs \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{AB} ne sont pas colinéaires, les droites (CH) et (AB) ne sont pas parallèles.

Exercice 10 : Correction

1. E le milieu de $[BC]$: $\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(4+4) = 4 \\ y_E = \frac{1}{2}(4+0) = 2 \end{cases}$; $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - 4 \\ y_F - 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -2 \\ y_F = 0 \end{cases}$.

2. $AE = \sqrt{(4-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20}$; $AF = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20}$; $FE = \sqrt{(4+2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40}$; donc $AE = AF$ et $AE^2 + AF^2 = FE^2$.

3. $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AE}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & 4-0 \\ y-0 & 2-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 \\ y & -2 \end{vmatrix} = -2x - 4y = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0$;

$\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BF}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -2-4 \\ y-4 & 0-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & -6 \\ y-4 & -4 \end{vmatrix} = -4(x-4) + 6(y-4) = 0 \Leftrightarrow -4x + 6y - 8 = 0$;

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 4y + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8/7 \\ y = 4/7 \end{cases}$.

4. G a évidemment pour coordonnées $(-2, -2)$; on a alors A, I, G alignés :

$\det(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8/7 - 0 & -2 - 0 \\ 4/7 - 4 & -2 - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8/7 & -2 \\ -24/7 & -6 \end{vmatrix} = \frac{48}{7} - \frac{48}{7} = 0$.

Exercice 11 : Correction

1. A est à l'intersection de (AB) et (AC) . Ses coordonnées $(x_A; y_A)$ sont solutions du système $\begin{cases} y = x + 3 \\ x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} -x + y - 3 = 0 \\ x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$.

En additionnant les deux lignes, on trouve : $3y + 3 = 0$ et donc : $y = -1$. En reportant dans une équation, il vient $x = -4$.

B a pour ordonnée 5 et appartient à (AB) d'équation $y = x + 3$. Son abscisse vaut 2.

C a pour ordonnée -4 et appartient à (AC) d'équation $x + 2y + 6 = 0$. On résout l'équation $x + 2(-4) + 6 = 0$ ce qui donne $x = 2$.

B' est le milieu de $[AC]$. Ses coordonnées sont donc : $\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(-1; -\frac{5}{2}\right)$.

2. Le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées : $(x_C - x_A; y_C - y_A)$, ce qui donne $(6; -3)$.

$M(x; y)$ appartient à (AC) équivaut à \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AC} colinéaires ce qui équivaut encore à $\text{dét}(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AC}) = 0$, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} x+4 & 6 \\ y+1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $-3(x+4) - 6(y+1) = 0$.

Après simplification, l'équation réduite de (AC) est : $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

Les points B et C ont la même abscisse 2 . La droite (BC) est donc parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est $x = 2$.

3. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Appelons x_D et y_D l'abscisse et l'ordonnée du point D . Les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont $(6; 6)$ et celles de \overrightarrow{DC} sont $(2 - x_D; -4 - y_D)$. Les vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées sont égales : $x_D = -4$ et $y_D = -10$; conclusion $D(-4; -10)$.

4. La droite (AB) a pour coefficient directeur 1 . (d) est parallèle à (AB) et a donc le même coefficient directeur. Son équation réduite est donc de la forme $y = x + k$.

Or (d) passe par le point $B'(-1; -\frac{5}{2})$; on trouve, en remplaçant, $k = -\frac{3}{2}$. Une équation de (d) est donc : $y = x - \frac{3}{2}$.

Les points d'intersection avec les axes ont, soit une abscisse nulle, soit une ordonnée nulle.

Ces points ont donc pour coordonnées : $(0; -\frac{3}{2})$ et $(\frac{3}{2}; 0)$.

5. Sur la figure, il semble que le centre de gravité du triangle ABC soit le point O . Pour le vérifier, montrons que O vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, en utilisant les coordonnées.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées : $(x_A + x_B + x_C; y_A + y_B + y_C)$. Or $x_A + x_B + x_C = -4 + 2 + 2 = 0$ et $y_A + y_B + y_C = -1 + 5 - 4 = 0$. Donc la relation est vérifiée. Le centre de gravité de ABC est O .

6. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, (AD) et (BC) sont parallèles. D'après 2. l'équation réduite de (AD) est donc $x = -4$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

Les coordonnées de E vérifient donc le système $\begin{cases} x = -4 \\ y = x - 3/2 \end{cases}$, soit $E(-4; -11/2)$. Les coordonnées

de F vérifient le système $\begin{cases} x = 2 \\ y = x - 3/2 \end{cases}$: $F(2; 1/2)$.

Le vecteur \overrightarrow{EF} a pour coordonnées : $(2 - (-4); (1/2) - (-11/2)) = (6; 6)$. Les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{AB} sont donc égaux, $ABFE$ est un parallélogramme.

7. Soit $G(x_G ; y_G)$ le centre de gravité de ADC . Alors $\overline{GA} + \overline{GD} + \overline{GC} = \vec{0}$. Avec les coordonnées, cela se traduit par :

$$\begin{cases} (-4 - x_G) + (-4 - x_G) + (2 - x_G) = 0 \\ (-1 - y_G) + (-10 - y_G) + (-4 - y_G) = 0 \end{cases}$$

D'où, après résolution des deux équations : $G(-2 ; -5)$. Comme G appartient à (d') , ses coordonnées vérifient l'équation $3x - y + k = 0$, d'où : $3(-2) - (-5) + k = 0$ et finalement : $k = 1$.

8. Voir le graphique (un des côtés est compris dans l'ensemble cherché).

