

EXERCICE N°1

Soit un parallélogramme $ABCD$. Le point I est le milieu de $[BC]$ et le point E est défini par :

$$\vec{AE} = \frac{2}{3} \vec{AC} \text{ et le point } A' \text{ est le milieu de } [AC].$$

1°) Construire les points I , A' et E .

2°) Montrer que : $\vec{DE} = \frac{1}{3} \vec{DA} + \frac{2}{3} \vec{DC}$

3°) Montrer que : $\vec{DI} = \frac{1}{2} \vec{DA} + \vec{DC}$

4°) En déduire que les points D , E et I sont alignés.

5°) Construire les points T et H tels que : $\vec{AT} = 4 \vec{AB}$ et $\vec{BH} = 3 \vec{BC}$

6°) Montrer que (TH) est parallèle à (BA')

EXERCICE N°2

Soit un triangle DIM . Soit A est le milieu de $[DM]$.

4°) Construire les points T et H tels que : $\vec{DT} = 4 \vec{DI}$ et $\vec{IH} = 3 \vec{IM}$

5°) Montrer que (TH) est parallèle à (IA)

EXERCICE N°3

Soit un triangle ABC . On désigne par A' et B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit

G le point tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

1°) Montrer que : $\vec{GB} + \vec{GC} = 2 \vec{GA}'$. En déduire que $\vec{AG} = 2 \vec{GA}'$.

2°) Montrer de même que $\vec{BG} = 2 \vec{GB}'$ et que $\vec{CG} = 2 \vec{GC}'$.

3°) En déduire que les trois médianes sont concourantes en G . (Le point G est appelé centre de gravité du triangle)

EXERCICE N°4

Soit ABC un triangle. On désigne par O le centre du cercle circonscrit, par G le centre de gravité et par H l'orthocentre.

Soient M le milieu de $[BC]$ et D le point diamétralement opposé à A sur le cercle.

1°) Quelle est la nature du quadrilatère $BHCD$? En déduire que $\vec{HA} = 2 \vec{MO}$.

2°) Démontrer que : $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2 \vec{HO}$ et $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$.

3°) On utilisant la relation : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Montrer que : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3 \vec{OG}$.

4°) En déduire que O , H et G sont alignés.

(La droite portant les points O , G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC .)

EXERCICE N°5

Soit un parallélogramme $ABCD$. Soit M le point défini par : $3 \vec{MA} + 2 \vec{MB} - 4 \vec{MC} = \vec{0}$.

1°) Montrer que : $\vec{AM} = 2 \vec{AB} - 4 \vec{AC}$.

2°) Déterminer le couple (x, y) de réels tel que : $\vec{DM} = x \vec{DC} + y \vec{DB}$.

3°) Déterminer le couple (x', y') de réels tel que : $\vec{DM} = x' \vec{DC} + y' \vec{DA}$.



EXERCICE N°6

Etant donné un triangle ABC, à chaque réel k on associe les points M et N définis par :

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + (1-k)\vec{AC} \text{ et } \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC} + (1-k)\vec{AB}$$

1°) Placer les points M et N correspondant à la valeur k = 2.

2°) Montrer que, pour tout réel k, les vecteurs \vec{MN} et \vec{BC} sont colinéaires.

3°) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles :

- a) M = N.
- b) BCMN est un parallélogramme.
- c) BCNM est un parallélogramme.

EXERCICE N°7

Soient A, B et C trois points quelconques. Démontrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis par :

$$\vec{u} = (1 - \sqrt{5})\vec{BC} + 2\vec{AB} \text{ et } \vec{v} = (1 + \sqrt{5})\vec{AB} - 2\vec{BC}$$

sont colinéaires.

EXERCICE N°8

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base. On considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis par :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ et } \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

1°) Montrer que (\vec{u}, \vec{v}) est une base.

2°) Soit \vec{e} le vecteur défini par : $\vec{e} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v}$.

X, Y, x et y étant quatre réels. Calculer X et Y en fonction de x et y.

EXERCICE N°9

Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et H le milieu de [IJ]. Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

$$1°) \|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + \vec{MC}\| \quad ; \quad 2°) \|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4 \cdot AB$$

EXERCICE N°10

Soient A et B deux points du plan.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $2 \cdot AB \leq \|\vec{MA} + \vec{MB}\| \leq 4 \cdot AB$

EXERCICE N°11

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormale. Soit $\vec{U} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

Déterminer le vecteur \vec{V} tel que : $\begin{cases} \vec{V} \perp \vec{U} \\ \|\vec{V}\| = \|\vec{U}\| \end{cases}$

EXERCICE N°12

Soit A, B, C et D sont quatre points du plan. Soient I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

1°) Démontrer que : $2\vec{IJ} = \vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

2°) M étant un point quelconque du plan,

Soit : $M_1 = S_A(M)$; $M_2 = S_B(M_1)$; $M_3 = S_C(M_2)$ et $M = S_D(M_3)$.

Démontrer que le vecteur $\vec{MM'}$ reste constant quand le point M varie.

3°) Comment faut-il choisir les points A, B, C et D pour que les points M et M' soient confondus ?

EXERCICE N°13

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. A tout point M du plan on associe le point S tel que :

$$\vec{MS} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$



1°) Exprimer \vec{MS} en fonction de \vec{MG} . En déduire une propriété des droites (AS) et (MA') et exprimer \vec{AS} en fonction de \vec{MA}' .

Exprimer de même : \vec{BS} en fonction de \vec{MB}' et \vec{CS} en fonction de \vec{MC}'

2°) Soit A'', B'' et C'' les milieux respectifs de [SA], [SB] et [SC].

Montrer que les segments [A'A''], [B'B''], [C'C''] et [SM] ont le même milieu.

EXERCICE N°14

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé. \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

Soient A_1, A_2 deux points du plan.

1°) Montrer que : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

2°) Prouver que : $2 \cdot \|\vec{OA}_1\| \leq \|\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2\| + \|\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2\|$

3°) En déduire que : $\|\vec{OA}_1\| + \|\vec{OA}_2\| \leq \|\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2\| + \|\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2\|$

4°) Soit ABC un triangle et I est le milieu de [BC]. Montrer que : $BC \leq AB + AC \leq 2AI + BC$

<http://maths-akir.nidiblogs.com/>

