EXERCICE N°1

Calculer les intégrales suivants :

$\int_0^4 |t-2|dt$, $\int_{-1}^2 (x-|x-1|)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(t)dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2(x)dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(tx)dt$, $\int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1}dx$,

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)dt$, $\int_0^1 t\sqrt{1-t}dt$, $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x - \sin x}{x}$, $\int_0^1 (2t+1)\sin\pi(t^2+t+1)dt$, ,

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$, $\int_0^1 xe^x dx$, $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

EXERCIECE N°2

1°)Déterminer trois réels a , b et c tels que : $\frac{2x^2+3x}{x+2} = ax+b+\frac{c}{x+2}$ *pour tout réel* $x \neq -2$

2°)Calculer l'intégrale : $I = \int_0^2 \frac{2x^2+3x}{x+2}dx$.

3°) Calculer l'intégrale : $J = \int_0^2 (4x+3)Log(x+2)dx$.

EXERCICE N°3

Soient $I = \int_1^2 \frac{x^2+2x}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$ *et* $J = \int_1^2 \frac{2x^2+1}{(2x+1)^2(1-4x)}dx$.

1°) Calculer $K = 2I + J$ *et* $L = 2I - J$.
2°) En déduire I et J.

EXERCICE N°4

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sin^4 x$

1°)Exprimer $\sin^2 x$ *ainsi que* $\cos^2 x$ *en fonction de cos2x.*

2°)Exprimer $\sin^4 x$ *en fonction de cos2x et cos4x*

3°)Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie sur [0, 1] par $f(x) = \frac{1}{1-xe^{-x}}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Donner une interprétation géométrique du nombre $I = \int_0^1 f(x)dx$.

2°) Soit n un nombre entier naturel non nul, et $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}dx$ ..

a. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :* $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$

b. *On se propose de calculer* J_2 *sans utiliser une intégration par parties : déterminer les coefficients a, b et c tels que la fonction H(x) définie par* $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ *soit une primitive de* $h(x) = x^2e^{-2x}$.

En déduire que $J_2 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{e^2}\right)$.

EXRCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ *par :* $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x}dx$

1°) En étudiant les variations de la fonction f, démontrer pour tout nombre réel x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$: $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$.

2°) a) Démontrer que, pour tout x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$.

b) En déduire que : $I = \int_0^{1/2} (1+x)\,e^{-x}\,dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)\,dx$

c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie : $J = \int_0^{1/2} (1+x)\,e^{-x}\,dx$

d) Déduire de (1) que : $\frac{1}{24} \le \int_0^{1/2} x^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{12\sqrt{e}}$

e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01.

EXERCICE N°7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.

1°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ;+\infty[$, on a : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3°) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})\,dt$

1°) Soit n un entier naturel. Donner une interprétation géométrique de F(n).

2°)Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3°) Démontrer que pour tout réel a strictement positif on a : $\frac{a}{a+1} \le \ln(1 + a) \le a$.

4°)Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 3° $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \le F(x) \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

5°)On admet que la limite de F(x) , lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I.

Etablir que : $\frac{1}{2}\ln 2 \le I \le \frac{1}{2}$.

EXERCICE N°8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ pour tout x de $[0,4]$.

1°)Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que vous calculez.

2°)Soit $a \in [0,4]$, calculer les intégrales : $I(a) = \int_0^a f(x)dx$ et $J(a) = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy$

3°)Vérifier que $I(a) + J(a) = af(a)$. Interprétez géométriquement cette dernière relation..

EXERCICE N°9

Soit la fonction f définie sur R_+^* par : $f(a) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^a}\,dx$.

1°)Soit pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = 1 - t - \sqrt{1-t}$.

a) Etudier les variations de g
b) En déduire que , pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) \le 0$

2°)Soit pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = 1 - \frac{t}{2} - \sqrt{1-t}$.

c) Etudier les variations de h
d) En déduire que , pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) \ge 0$

3°)En déduire que , pur tout $x \in [0,1]$: $1 - x^a \le \sqrt{1 - x^a} \le 1 - \frac{1}{2}x^a$

4°)En déduire que : $\frac{a}{1+a} < f(a) < \frac{2a+1}{2a+2}$.Calculer $\lim_{a \to +\infty} f(a)$

EXERCICE N°10

1°)Soit $C=\{M(x,y)\ \ /\ \ y=\sqrt{1-x^2}\ \ ,-1\le x\le 1\}$ *et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).Calculer le volume de S.*

2°) Soit $C=\{M(x,y)\ \ /\ \ xy=1\ \ ,1\le 2x\le 2\}$ *et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.*

3°)Déterminer le volume du cylindre engendré par les rotations d'axe (Ox) du segment de droite :

$y=R$ *et* $0\le x\le h$ *avec* $h,R\in \mathbb{R}_+^*$