EXERCICE N°1

Partie A

1°)Étudier le signe du polynôme $P(X) = -8X^2 + 2X + 1$ *où X est un réel.*

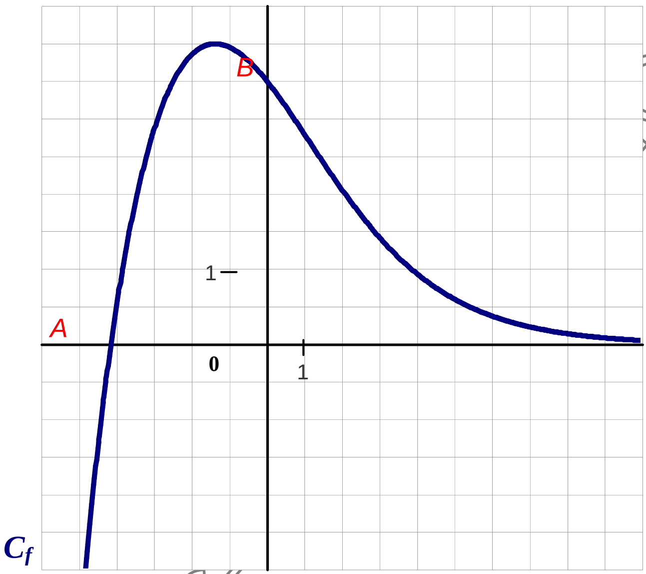
2°)Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -8e^{x} + e^{-x} + 2$

a)Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{-8e^{2x} + 2e^{x} + 1}{e^{x}}$

b)Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $-8e^{x} + 2e^{x} + 1 = 0$ *, en déduire les solutions de l'équation g(x)=0.*
c)Étudier le signe de la fonction g sur R.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = \dfrac{8 - e^{x}}{1 + e^{x}}$ *. Sa courbe représentative* C_f *est donnée ci-dessous.*



1°)Calculer les coordonnées des points A et B intersection de la courbe C_f *avec les axes du repère.*
2°)Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ *et en* $+\infty$*. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe* C_f *.*
3°)Calculer f '(x).
4°)Étudier les de variations de f sur R
5°)Donner les équations des tangentes à la courbe C_f *aux points d'abscisses -3ln2 et 0.*

EXERCICE N°2

Partie I

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *par :g(x) =* $-x^2 + a\,x - \ln(2x+b)$*, où a et b sont deux réels.*

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ *passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse* $\dfrac{1}{2}$ *.*

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *par :* $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$*.*

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}+\ln(\frac{1}{2})$	↘	$-\infty$

1) Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3) Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2 e^{2x}$.

1) *Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie sur R par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{2x}$ soit une primitive de f sur R.*
2) *En déduire la primitive de f sur R qui s'annule en $x = 0$.*

EXERCICE N°4

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$
Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

1°)Etudier le sens de variation de la fonction f_1.

2°) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.

En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3°)Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B

1°) Calculer $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.

2°) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
3°) Dresser le tableau de variation de f_k.
4°) Déterminer une équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O.
5°) Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de (C_p) et (C_m).
6°) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

EXERCICE N°5

Partie A.

On désigne par f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal. $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2°) Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
3°)Tracer la courbe C.

Partie B.

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur R-{0} par $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right|$.

On note G la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°)Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2°)Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g.

3°)Démonter que pour tout x réel strictement positif : $g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$

Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe G. Étudier la position de la courbe G par rapport à D pour tout x réel strictement positif.

4°)Démontrer que pour tout x réel strictement négatif: $g(x) - \dfrac{x}{2} = ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$

Montrer que la droite d d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ *est asymptote à la courbe G.*

Étudier la position de G par rapport à d pour tout x réel strictement négatif.

5°)Construire G, D et d dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)

EXERCICE N°6

Partie I

1°) Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur R par $g(x) = (a\,x + b)\,e^{-x} + c$

a) Calculer $g'(x)$.

b) Le tableau de variation de g est le suivant :

En utilisant les données numériques de ce tableau, établir que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$				+			0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	2	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

Ainsi pour la suite du problème : $g(x) = (2\,x - 1)\,e^{-x} + 2$.

2°) a) Montrer que l'équation admet une solution unique dans l'intervalle [- 1; 0].

On note α cette solution.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.

3°) Etudier le signe de g(x) pour x appartenant à R.

Partie II

Soit la fonction définie sur R par $f(x) = 2\,x + 1 - x\,e^{-x}$

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b)Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra mettre x en facteur dans l'expression de f(x)).

2) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$

b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f sur R.

*3) Dans le plan muni d'un repère orthonormal on appelle **C** la représentation graphique de f et **D** la droite d'équation $y = 2x + 1$.*

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$

b) Donner une interprétation graphique de ce résultat.

*c) Etudier la position de **C** par rapport à **D**.*

*d) Tracer **D** et **C** dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

On prendra pour unité graphique 2 cm.