EXERCICE N°1

1°)Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_0 = 3i + \dfrac{1}{i} - 2$, $z_1 = (1+i)^2$, $z_2 = (1-2i)^2$, $z_3 = \dfrac{1}{3+2i}$, $z_4 = \dfrac{1+2i}{2-3i}$.

2°)Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_0 = 3i - 2$, $z_1 = (2+i)^2$, $z_2 = \dfrac{1}{5+2i}$, $z_3 = \dfrac{2-i}{i+3}$, $z_4 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$

EXERCICE N°2

Soit $z = 1-2i$ *et* $z' = -1+3i$

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants : $Z_0 = z \times z'$, $Z_1 = \overline{z} \times z'$,

$Z_2 = z^2 \times \overline{z'}$, $Z_3 = \dfrac{z-3}{\overline{z'}+2i}$

EXERCICE N°3

z désigne un nombre complexe différent de 2 i.

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ *(unité graphique: 3 cm). On désigne par A le point d'affixe 2 i. A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M', d'affixe z' définie par* $z' = \dfrac{z+2i}{z-2i}$.

1°)Calculer l'affixe du point N' image par f du point N d'affixe $\sqrt{3}+i$.

2°) Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe 1 + i.

3°) Soit un complexe z distinct de 2 i, on pose : z = x + i y et z' = x' + i y', avec x, y, x' et y' réels.

Démontrer que : $x' = \dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2}$ *et* $y' = \dfrac{4x}{x^2+(y-2)^2}$

4°) Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :

a) z' est réel

b) z' est de module 1

EXERCICE N°4

Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$ *avec* $z = x+iy$ *où* $x , y \in R$

1°)Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

2°)Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

3°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

EXERCICE N°5

Soient $z_1 = \dfrac{2009+i2008}{2009-i2008}$ *et* $z_2 = \dfrac{2009-i2008}{2009+i2008}$

Montrer que $z_1 + z_2$ *est réel et que* $z_1 - z_2$ *est imaginaire pur.*

EXERCICE N°6

Soit a , b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: a + b + c = 1.Calculer $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

EXERCICE N°7

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ *on considère les points A , B et C d'affixes respectives* $z_A = 1+i$, $z_B = 3+i$ *et* $z_C = 1-2i$.

1°) Placer les points A , B et C

2°)Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_A - z_C|$ *et* $|z_B - z_C|$.

3°)En déduire la nature du triangle ABC.

4°)Déterminer l'affixe de point D tel que ABDC soit un rectangle .

EXERCICE N°8

Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ avec $x, y \in R$

1°)Déterminer le plan complexe, l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z^2 est un réel.

2°) Déterminer le plan complexe, l'ensemble F des points M d'affixe z tel que $|z| = 1$.

EXERCICE N°3

1°)Déterminer les racines carrés des nombres complexes suivants

a) $z_0 = -3$, *b)* $z_1 = 3 + 4i$, *c)* $z_2 = i$

2°)Résoudre alors dans C les équation suivantes :

a) $z^2 + z + 1 = 0$, *b)* $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, *c)* $iz^2 + (1+i)z + \frac{1}{4} = 0$

EXERCICE N°9

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3z_1 - iz_2 = -i \\ 2iz_1 + z_2 = i \end{cases}$

EXERCICE N°10

A tout complexe z on associe le complexe : $P(z) = 2z^2 + z + 5\overline{z}$.

1°) Calculer $P(1 + i)$.

2°) Démontrer que si $z = x + iy$ *avec* $x \in R$ *et* $y \in R$

alors l'équation $P(z) = 0$ *équivaut au système :* $\begin{cases} x(x+3) - y^2 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$

3°) En déduire la résolution dans C de l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE N°11

On considère l'équation (E) : $z^2 + z + 1 + i = 0$

On note par z_1 *et* z_2 *les racines de (E) .*

1°)Déterminer les racines carrés de nombre complexe : $b = -3 - 4i$

2°) Résoudre alors dans C l'équation (E).

3°) Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle z_1 *et* z_2

4°) Soit z un nombre complexe : $z = x + iy$ *où* $(x, y) \in R^2$ *et* $Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$

Soit M d'affixe z

- *a) Ecrire Z sous forme cartésienne*
- *b) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z est un réel.*
- *c) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z est imaginaire pur.*

5°) On considère l'équation (E') : $z^3 + (1 - i)z^2 + z + 1 - i = 0$

- *a) Vérifier que i est une racine de l'équation (E').*
- *b) Déterminer a et b tel que* $z^3 + (1 - i)z^2 + z + 1 - i = (z - i)(z^2 + az + b)$
- *c) Résoudre alors dans C l'équation (E')*

6°)Résoudre dans C l'équation : $\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)^3 + (1-i)\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+1}\right) + 1 - i = 0$

EXERCICE N°12

Soit $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1°) Calculer $P(1 + i)$.

2°) Démontrer que P(z) admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.

3°) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$ *pour tout complexe z.*

4°) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ *dans C.*

5°) Soient A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = \overline{z_A}$ *et* $z_C = 2i$.

a) Faire une figure. Démontrer que A, B et C sont sur un même cercle de centre O.

b) Calculer $z_B - z_A$ *et* $z_B - z_C$*, en déduire que le quadrilatère OABC est un losange.*

EXERCICE N°13

On considère le polynôme P défini sur C par : $P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$.

1°) Justifier que : $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

En déduire que si z_0 est une racine de P, alors son conjugué est aussi une racine de P.

2°) a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.

b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.

3°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $-2i$, $2i$, $-1 + i$ et $-1 - i$.

a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.

b) Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.

EXERCICE N°14

On considère l'équation (E) : $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$.

1°)Montrer que (E) admet un solution imaginaire pure.

2°)Résoudre alors (E) dans C.

EXERCICE N°15

Résoudre dans C l'équation : $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 17i - 2 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

EXERCICE N°16

1°)Résoudre danc C l'équation : $Z^2 - 2Z - 3 = 0$

2°) Résoudre danc C l'équations : $z + \frac{1}{z} = -1$ et $z + \frac{1}{z} = 3$

3°)On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

a)Vérifier que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^2 - 2Z - 3 = 0 \end{cases}$

b)En déduire la résolution de (E)dans C.

EXERCICE N°17 (BAC)

Partie A :

On considère dans C : $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des réels.

1°)a)Montrer que si f(2)=0 et f(1-i)=0 alors a , b et c vérifient le système : $(S) : \begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases}$

b)Résoudre dans R^3 le système (S).

2°)Dans la suite on prend $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a)Vérifier que pout tout nombre complexe z , on a : $f(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.

b)Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et 1-i .

1°)Montrer que le triangle OAB est rectangle en B.

2°)Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que OABC est un carré.