EXERCICE N°1

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u\ :\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

Partie A

1°) Calculer u_1 *et* u_2 *. u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?*

2°)Montrer que : pour tout n de N : $2 \le u_n \le 5$ *.*

3°)Montrer que (u) est croissante sur N .

4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$ *.*

1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique

2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

4°)Soit pour tout n de N : $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ *et* $s'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

a- Exprimer s_n *puis* s'_n *en fonction de n*

b- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n$

EXERCICE N° 2

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u\ :\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Partie A

1°)Montrer que : pour tout n de N : $0 < u_n \le 1$ *.*

2°)Montrer que (u) est croissante sur N .

3°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$ *.*

1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique

2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N° 3

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u\ :\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+{u_n}^2}{2}} \end{cases}$

Partie A

1°)Montrer que : pour tout n de N : $u_n \ge 1$.

2°)Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-{u_n}^2}{2(u_{n+1}+u_n)}$

3°)En déduire le sens de variations de (u).

4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = {u_n}^2 - 1$ *.*

1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique

2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N°4

Soient a et b deux réels tels que $0<a \le b$ *et* (u_n) *la suite définie par :*

$u_1=a+b$ *et* $\forall n \in N^*$: $u_{n+1}=a+b-\dfrac{ab}{u_n}$.

1°) *On suppose que* $a<b$.

(a) *Montrer que* (u_n) *est minorée par* b.

(b) *Etudier la monotonie de la suite* (u_n) *en déduire qu'elle est convergente.*

2°) *Soit* v *la suite définie par :* $\forall n \in N^*$: $v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$

(a) *Montrer que* v *est une suite géométrique.*

(b) *En déduire* u_n *en fonction de* n, a *et* b

(c) *Calculer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3°) *On suppose que* $a=b$.

(a) *Calculer* u_1, u_2, u_3, u_4 *en fonction de* a.

(b) *Exprimer alors* u_n *en fonction de* n *et* a *puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°5

Soit la fonction $f : R_+ \to R$, $x \mapsto f(x)=\sqrt{4+3x}$.

On considère la suite réelle u *définie par* $u_0=0$ *et* $\forall n \in N$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1°)(a) *Montrer que :* $\forall n \in N$: $0 \le u_n \le 4$

(b) *Etudier la monotonie de* u.

(c) *En déduire que* u *est convergente.*

2°)(a) *Montrer que :* $\forall n \in N$, $|u_{n+1}-4| \le \dfrac{3}{4}|u_n - 4|$

(b) *En déduire :* $\forall n \in N$, $|u_n - 4| \le 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. *En déduire alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°6

On pose pour tout n de N :* $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\mathrm{Log}x)^n dx$

1°)*Calculer* $I_0 = \displaystyle\int_1^e x^2 dx$

2°)*A l'aide d'une intégration par parties, calculer* I_1

3°) *A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour n de N* :* $3 I_{n+1} + (n+1)\ I_n = e^3$

4°)*En déduire* I_2.

5°)*Démontrer que , pour tout n de N,* I_n *est positive.*

6°)*Déduire de la question 3 que pour tout n de IN* :* $I_n \le \dfrac{e^3}{n+1}$

7°)*Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N°7

On considère la suite (U_n) *définie par : pour tout entier naturel n non nul,* $U_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1°)*Montrer que la fonction* $f : t \mapsto (2-t)e^t$ *est une primitive de* $g : t \mapsto (1-t)e^t$ *sur [0 , 1].*

En déduire la valeur de U_1.

2°)*Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,* $U_{n+1} = (n+1)\ U_n - 1$

3°) *Montrer que pour tout entier naturel n non nul,* $U_n \ge 0$

4°)a) *Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :*

$(1-t)^n\ e^t \le e \times (1-t)^n$

b) *En déduire que pour tout n non nul,* $U_n \le \dfrac{e}{n+1}$

5°)*Déterminer la limite de la suite* (U_n)

EXERCICE N°8

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ *définie par* $u_o = e$ *et, pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln u_n$

1°)a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ *en déduire que* v_n *est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.*

b)Donner l'expression de v_n *en fonction de n.En déduire celle de* u_n *en fonction de n.*

2°)Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_n$ *et* $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots. \times u_n$
a)Montrer que $P_n = e^{S_n}$
b)Exprimer S_n *en fonction de n.*
c)En déduire l'expression de P_n *en fonction de n.*

Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in N}$ *; en déduire celle de la suite* $(P_n)_{n\in N}$.