Séries d'exercices 4ème économie
LOG ET EXP

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

EXERCICE N°1

1°)Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $g(x) = x\ln(x) - x + 1$.

a) *Etudier le sens de variations de g*
b) *En déduire le signe de g .*

2°)On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

a) *Etudier les limites de f en* $+\infty$ *et en 1 .*
b) *Dresser le tableau de variation de f .*
c) *Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm)*

EXERCICE N°2

1°)Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$

a) *Etudier les variations de f*
b) *En déduire que pour tout* $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

2°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

a) *Etudier les variations de f*
b) *En déduire que pour tout* $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

3°)Etudier la limite éventuelle en 0^+ *de* $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

EXERCICE N°3

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ *par :* $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4\ln x$

1°) Etudier les variations de g. Préciser g(1).
2°) En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0 ;1[$ *et* $]1 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$.

1°) Monter que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$ *(on pourra mettre* x^2 *en facteur dans l'expression f(x)).*
Déterminer la limite de f en 0.

3°) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2x}g(x)$.

En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4°) On nomme C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C.

Partie C

1°) Montrer que l'équation f(x) = x admet une seule solution sur l'intervalle $]0 ; 1[$ *(on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur* $]0 ;1[$ *par* $h(x) = f(x) - x$*).*
On nomme α *cette solution.*

2°) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *admet une seule solution sur l'intervalle* $]1 ; +\infty[$.

On nomme β *cette solution. Montrer que* $\alpha.\beta = 1$.
3°) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de β *d'amplitude* 10^{-2}*. En déduire un encadrement de* α

EXERCICE N°4

Partie A

On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

1°) a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$*, où P est un polynôme de degré 3.*

b) Vérifier que P(1) = 0. Factoriser P.

c) Étudier le sens de variation de g. (On ne demande pas le calcul des limites en 0 et en +∞)

2°) Déduire de la question précédente le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x + \ln x}{x^2}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1°) a) Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers 0.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln x}{x^2} = 0$. *En déduire la limite de f(x) quand x tend vers +∞.*

c) Justifier que les droites (D) et (D') d'équations respectives : $x = 0$ *et* $y = x + 1$ *sont asymptotes à la courbe (C).*

2°) a) Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + \ln x$ *est strictement croissante sur]0 ; +∞[et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.*

b) En déduire que (D') coupe (C) en un point unique d'abscisse α *vérifiant :* $\alpha + \ln \alpha = 0$.

Démontrer que : $0,56 < \alpha < 0,57$.

3°) Étudier le sens de variation de f.

4°) Déduire du 3° l'existence d'une valeur unique β *telle que* $f(\beta) = 0$.

Démontrer que : $0,46 < \beta < 0,47$.

5°) Construire (C) et (D').

EXERCICE N°5

Partie I

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *par :* $g(x) = -x^2 + a\,x - \ln(2x+b)$*, où a et b sont deux réels.*

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ *passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse* $\dfrac{1}{2}$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *par :* $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}+\ln(\frac{1}{2})$	↘	$-\infty$

1) Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.

2) a) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet une solution α *dans l'intervalle* $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

b) Donner un encadrement de α *d'amplitude* 10^{-2}.

3) Déterminer le signe de f (x) sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

EXERCICE N°6 : *Soit f la fonction définie sur R par :* $f(x) = x^2 e^{2x}$.

1) *Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie sur R par :* $F(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{2x}$ *soit une primitive de f sur R.*
2) *En déduire la primitive de f sur R qui s'annule en x = 0.*

EXERCICE N°7

Partie A

1°)Étudier le signe du polynôme $P(X) = -8X^2 + 2X + 1$ *où X est un réel.*

2°)Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -8e^x + e^{-x} + 2$

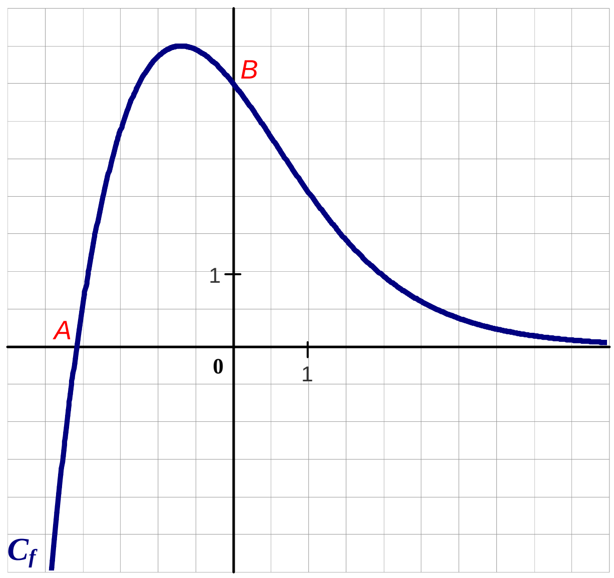
a)Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{-8e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}$

b)Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $-8e^x + 2e^x + 1 = 0$ *, en déduire les solutions de l'équation g(x)=0.*

c)Étudier le signe de la fonction g sur R.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = \dfrac{8 - e^x}{1 + e^x}$ *. Sa courbe représentative* C_f *est donnée ci-dessous.*



1°)Calculer les coordonnées des points A et B intersection de la courbe C_f *avec les axes du repère.*

2°)Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ *et en* $+\infty$*. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe* C_f *.*

3°)Calculer $f'(x)$*.*

4°)Étudier les de variations de f sur R

5°)Donner les équations des tangentes à la courbe C_f *aux points d'abscisses -3ln2 et 0.*

EXERCICE N°8 :*Soit f la fonction définie sur R par :* $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie I

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

a) *Etudier les limites de g en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.
b) *Etudier le sens de variation de g.*
c) *Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique* α *dans R, puis justifier que :* $0,35 \le \alpha \le 0,36$.
d) *En déduire le signe de g.*

Partie II.

a) *Etudier les limites de f en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.
b) *Calculer f'(x). En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de f.*
c) *Démontrer que* $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ *et déterminer un encadrement de* $f(\alpha)$ *d'amplitude* 4×10^{-2}.
d) *Démontrer que la droite* Δ *d'équation* $y = x - 1$ *est asymptote à (C) en* $+\infty$. *Préciser la position de (C) par rapport à* Δ.

e) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
f) Tracer Δ, T et (C).

EXERCICE N°9

On appelle f la fonction définie sur [0; +∞[par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
1°) a) Calculer, pour tout réel x positif, f'(x) et f''(x).
b) Etudier le sens de variation de la dérivée f'.
Démontrer que pour tout réel x positif, f'(x) > 0.
c) Calculer la limite de f en +∞.
d) Dresser le tableau de variation de f.
2°) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de D et (C).
b) Montrer que la courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite D.
Déterminer les coordonnées de A.
3°) Démontrer que l'équation f(x) = 2 admet sur [0 ; +∞[une unique solution notée α.
Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
4°) a) Construire la droite D, le point A défini en 2°b), la courbe (C) et la tangente en A à la courbe (C).
b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

EXERCICE N°10

Partie I

1°) Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur R par $g(x) = (a x + b) e^{-x} + c$
a) Calculer g'(x).
b) Le tableau de variation de g est le suivant :
En utilisant les données numériques de ce tableau, établir que a = 1, b = - 1 et c = 2.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$		0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↗	2 ↗	$e^{-2}+2$ ↘	2

Ainsi pour la suite du problème : $g(x) = (2 x - 1) e^{-x} +2$.
2°) a) Montrer que l'équation admet une solution unique dans l'intervalle [- 1; 0].
On note α cette solution.
b) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.
3°) Etudier le signe de g(x) pour x appartenant à R.

Partie II

Soit la fonction définie sur R par $f(x) = 2 x + 1 - x e^{-x}$
1) a) Déterminer la limite de f en +∞
b)Déterminer la limite de f en -∞ (on pourra mettre x en facteur dans l'expression de f(x)).
2) a) Montrer que f '(x) = g(x)
b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f sur R.
*3) Dans le plan muni d'un repère orthonormal on appelle **C** la représentation graphique de f et **D** la droite d'équation y = 2x + 1.*
a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x+1)]$

b) Donner une interprétation graphique de ce résultat.
*c) Etudier la position de **C** par rapport à **D**.*
*d) Tracer **D** et **C** dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*
On prendra pour unité graphique 2 cm.