

EXERCICE N°1

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[\\ \frac{1}{2}x^2 + x - 2 & \text{si } x \in [-2; 1] \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de g sur \mathbb{R} .

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = |x^2 + x| \sqrt{x+1}$.

1°) Déterminer le signe de $P(x) = x^2 + x$ suivant les valeurs de x dans $[-1; +\infty[$.

1°) Etudier la dérivabilité de f en $x = -1$.

2°) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$.

3°) Conclure sur les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse -1 et 0 .

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur $[-4, 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } x \in [-4; -2] \\ 2 - x - x^2 & \text{si } x \in]-2; 4]. \end{cases}$$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormal.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$.

b) f est dérivable en $x = -2$.

c) (C) admet deux tangentes horizontales.

d) La tangente à (C) au point d'abscisse $x = -1$ a un unique point d'intersection avec (C) .

e) La tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ a un unique point d'intersection avec (C) .

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = |x+1|(x^2 + x)$

1°) Déterminer l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $[-1; \infty[$.

2°) Étudier la dérivabilité de f en -1 .

EXERCICE N°5

Montrer que : Pour tout $x > 0$: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE N°6

Partie I

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2°) Montrer que $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{si } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3°) Dresser le tableau des variations de f

4°) Montrer que si $x > 2$ alors $f(x) > 2$

5°) Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Partie II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$

1°) Montrer que : pour tout n de \mathbb{N} : $u_n > 2$.



2°) Etudier les variations de (u) .

3°) En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

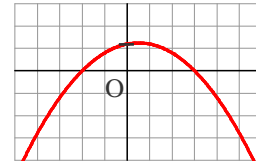
4°) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{u_n - 2}{2}$

5°) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} : $u_n - 2 \leq \frac{1}{2^n}$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°7

La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.

(\vec{i} = 1 ; \vec{j} = 5)



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f . Laquelle ? (justifier la réponse)

Figure 1

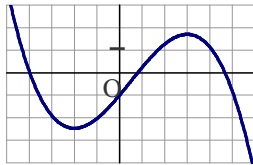


Figure 2

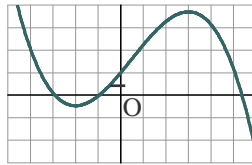
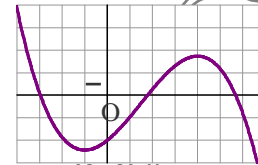


Figure 3



EXERCICE N°8

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

1°) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} ; I = \mathbb{R}$

2°) $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1) ; I = \mathbb{R}$

3°) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4°) $f : x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1) ; I = \mathbb{R}$

5°) $f : x \mapsto \sin x + x \cos x ; I = \mathbb{R}$

6°) $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} ; I =]-1,1[$

7°) $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} ; I =]0,\pi[$

8°) $f : x \mapsto \cos x \cdot \cos 2x ; I = \mathbb{R}$

9°) $f : x \mapsto \frac{x \cos x + \sin x}{x^2} ; I =]0,+\infty[$

10°) $f : x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} ; I =]-2,0[$

EXERCICE N°9

1°) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^2 = a.(x-1)^2 + b.(x-1) + c$.

2°) En déduire les primitives de f sur \mathbb{R} tel que $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$

EXERCICE N°10

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x \cdot \cos x$.

1°) Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x \cdot \sin x$.

2°) En déduire une primitive de f sur \mathbb{R}

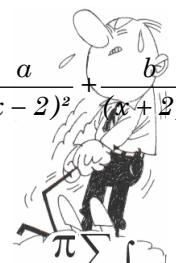
EXERCICE N°11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

1°) Prouver qu'il existe deux réels a et b telles que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$: on ait : $f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$

2°) Déduire les primitives sur $]-2, 2[$ de f .

EXERCICE N°12



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 2[$ par : $f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Déterminer les réels a et b , tels que pour tout réel x de l'intervalle $I =]-\infty; 2[$: $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$

2°) En déduire la primitive de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 2[$ qui s'annule en $x = 1$.

EXERCICE N°13

Soit F la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par : $F(x) = x\sqrt{1-x}$

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et étudier la dérivabilité de F en 1.

b) Calculer $F'(x)$ pour tout x de $] -\infty; 1[$.

2°) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $] -\infty; 1[$ par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3°) Soit h la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

a) Exprimer $h(x)$ en fonction de $F'(x)$ et de $g(x)$.

b) En déduire une primitive H de h sur $] -\infty; 1[$.

c) Déterminer la primitive H_0 de h s'annulant en $x = -3$.

EXERCICE N°14

Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .

2°) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

4°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

