EXERCICE N°1

En utilisant le principe de récurrence, montrer que :

1°)Pour tout $n \in N^*$: $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2°)Pour tout $n \in N^*$: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3°)Pour tout $n \in N^*$: $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4°) Pour tout $n \in N^*$: $1.(1!)+2(2!)+\ldots+n(n!)=(n+1)!-1$

EXERCICE N°2

On considère la suite réelle u définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}+1 \end{cases}$

1°) Montrer que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.

2°) Montrer que , pour tout n de N : $1 \le u_n \le 2$

3°) Montrer que u est croissante sur N.

4°)Soit pour tout n de N : $v_n = u_n - a$

a) Déterminer a pour que la suite (v_n) soit géométrique.

b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5°)Soit $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Exprimer s_n en fonction de n.

EXERCICE N°3

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$

1°) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2°) Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que w est une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3°)Etudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

4°)Montrer que (u_n) est majoré par 4 et (v_n) est minoré par 3.

5°) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par :$t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.

Démontrer que la suite (t_n) est constante.

6°)En déduire u_n et v_n en fonction de n.

7°)Calculer alors la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE N°4

On considère la suite réelle u définie sur N par : $\begin{cases} u_0 \in R \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+a}{u_n+1} \end{cases}$

Parti I. Dans cette partie on prend $u_0 = 1$ et $a = 0$

1°) Montrer que , pour tout n de N : $u_n > 0$

2°)Soit pour tout n de N : $w_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que w est une arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

Partie II.Dans cette partie on prend $u_0 = 0$ *et* $a = \frac{1}{4}$

1°) Montrer que , pour tout n de N : $0 \le u_n < \frac{1}{2}$

2°)Etudier la monotonie de u.

3°)Soit pour tout n de N : $v_n = \frac{2u_n + 1}{2u_n - 1}$.

a) *Montrer que v est suite une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison*
b) *Exprimer alors* u_n *en fonction de n.*
c) *Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°5

On considère la suite (u_n) *définie pour tout* $n \in N$ *par :* $\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$

1°) Justifier que pour tout $n \ge 1$, $u_n \ge 1$.
2°) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$.

a) *Démontrer que* (v_n) *est une suite arithmétique*
b) *Calculer* v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

EXERCICE N°6

On définit la suite (u_n) *par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} \end{cases}$, $n \in N$

1°) Calculer u_1 *et* u_2.

2°) Soit la fonction h définie sur [0; 5] par : $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$

a) *Étudier les variations de h.*
b) *Résoudre l'équation* $h(x) = x$.
c) *Tracer la courbe (H) représentative de h et la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$ *dans un repère orthonormal* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *(unité graphique : 2 cm).*

3°) a) Construire à l'aide de (H) et de (Δ) *les points de* $(O;\vec{i})$ *d'abscisses* u_0, u_1, u_2 *et* u_3 *en expliquant leur construction.*

b) *Que peut-on supposer pour la monotonie et la convergence de* (u_n) *?*
c) *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,* $1 \le u_n \le 4$.

4°) On définit la suite (v_n) *pour tout entier naturel n par :* $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

a) *Calculer* v_0 *et* v_1.
b) *Démontrer que* (v_n) *est une suite géométrique que l'on caractérisera.*
c) *Exprimer alors* u_n *en fonction de n.*
d) *Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°7

On considère la suite réelle u définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \end{cases}$

1°)Montrer que , pour tout n de N : $0 \le u_n \le 4$

2°) Etudier la monotonie de u.

3°) Montrer que , pour tout n de N : $|u_{n+1} - 4| \le \frac{3}{4}|u_n - 4|$

4°)En déduire que pour tout n de N : $4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n \le u_n \le 4$ *. Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

5°)Soit pour tout n de N : $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *. Montrer que pour tout n de N* :* $4 + \frac{12}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{12}{n} \le \frac{s_n}{n} \le 4 + \frac{4}{n}$

Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$