I- Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{\tan^2 x}$

1- a) Montrer que f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que f n'est pas dérivable à droite en zéro.

2- a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On calculera $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

c) Sans calculer $f^{-1}(2)$, prouver que $f^{-1}(2)>\frac{\pi}{3}$. En déduire que $f^{-1}(2)>1$.

3- a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en zéro.

II- $H(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ et $H(1)=a$.

1- déterminer le domaine de définition D_H de H.

2- Déterminer a pour que H soit continue sur D_H.

III- On pose $\varphi(x)=f^{-1}\left(x^2\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

1- a) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$. Déduire que : $\forall x\in\,]0,+\infty[\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2}$.

c) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ f^{-1}(n)+f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2- Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\{0,1,2,.....n\}$: $f^{-1}(n)\le f^{-1}(n+k)\le f^{-1}(2n)$.

3- Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\le U_n\le f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

IV- On pose $h(x) = f^{-1}(x+1)$

1- Etudier et représenter graphiquement h

2- Montrer : $\forall x \in [-1,+\infty[\; 0 \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$.

3- Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une seule solution α dans $[-1,+\infty[$ (on admet que $h'(x) < 1 \;\forall x > -1$). Prouver que : $1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$.

4- On pose $\begin{cases} v_0 = \frac{4}{3} \\ v_{n+1} = h(v_n) \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$

b) Montrer que : $\forall x \in \left]1, \frac{5}{3}\right[$ on a : $|h'(x)| \leq \frac{4}{5}$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|v_n - \alpha|$. Prouver que $\lim v_n = \alpha$.

I. $f(x)=\sqrt[3]{\tan^2 x}$, $\forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f(x)=(\tan x)^{\frac{2}{3}}$ car $\tan x\geq 0,\ \forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1- a) $\left(x\overset{u}{\mapsto}\tan x\right)$ est <u>continue</u> et <u>positve</u> sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f=u^{\frac{2}{3}}$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$\left(x\overset{u}{\mapsto}\tan x\right)$ est <u>dérivable</u> et <u>strictement positive</u> sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f=u^{\frac{2}{3}}$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) $\forall\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f'(x)=\frac{2}{3}u'(x)[u(x)]^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1+\tan^2 x}{(\tan x)^{\frac{1}{3}}}\right]=\frac{2}{3}\times\frac{(1+\tan^2 x)}{\sqrt[3]{\tan x}}>0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan x)^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(\frac{\tan x}{x}\right)}_{\searrow 1}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}}}_{\searrow 0^+}=+\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 0.

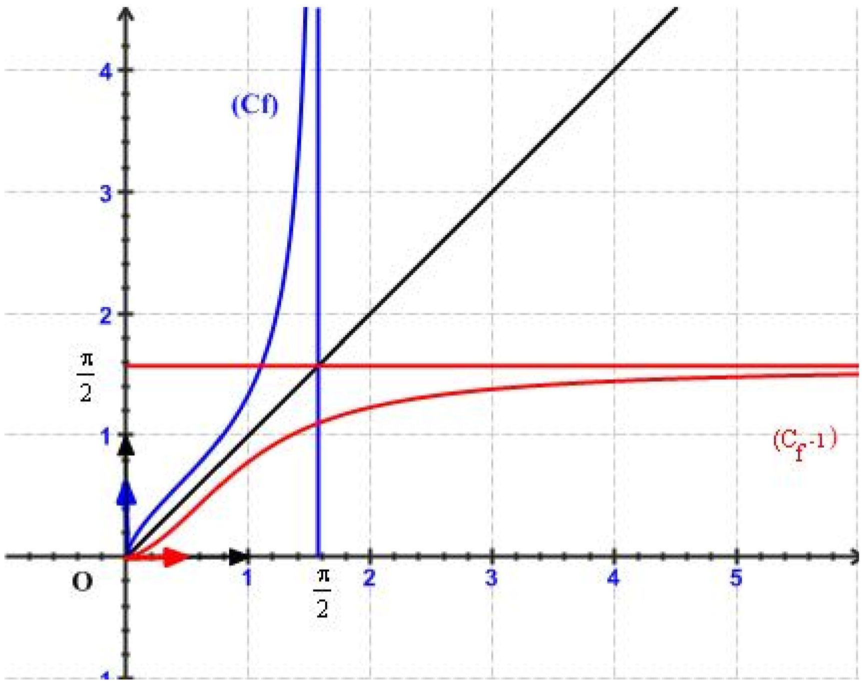
2- a) f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[f(0),\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}f\right[=[0,+\infty[$.

b)

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt[3]{3}\simeq 1.4$



c) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{3}\simeq 1.4<2$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3}<f^{-1}(2)$

$\left(f^{-1}\text{ est strictement croissante sur }[0,+\infty[\right)$

Or $\frac{\pi}{3}>1\Rightarrow f^{-1}(2)>1$.

3- a) f est drivable et $f'\neq 0$, sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]0,+\infty\right[$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)},\ \forall\ x\in\left]0,+\infty\right[$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\frac{2}{3}\times\frac{(1+\tan^2 t)}{\sqrt[3]{\tan t}}},\ \text{où}\ f^{-1}(x)=t$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt[3]{\tan t}}{(1+\tan^2 t)}$$

Or $f^{-1}(x)=t\Rightarrow f(t)=x\Rightarrow \sqrt[3]{\tan^2 t}=x\Rightarrow\left(\sqrt[3]{\tan t}\right)^2=x\Rightarrow\sqrt[3]{\tan t}=\sqrt{x}$

De plus on a : $\tan^2 t=x^3\Rightarrow 1+\tan^2 t=1+x^3$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2\left(1+x^3\right)},\ \forall\ x\in\left]0,+\infty\right[.$$

b) $$\lim_{x\to0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x}\underbrace{=}_{\text{On pose } f^{-1}(x)=y}\lim_{y\to0^+}\frac{y}{f(y)}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{\underbrace{\frac{f(y)}{y}}_{\searrow+\infty}}=0$$

$\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable à droite en 0 et on a : $\left(f^{-1}\right)'_d(0)=0$

II. $H(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ et $H(1)=a$.

1- $D_H=\left[0,+\infty\right[$

2- $\left(x\mapsto\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}\right)$ est continue sur $\left[0,+\infty\right[\setminus\{1\}$, puisque f^{-1} est continue sur $\left[0,+\infty\right[$

$$\lim_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{3\sqrt{1}}{2\left(1+1^3\right)}=\frac{3}{4}$$

Pour que f^{-1} soit continue sur $\left[0,+\infty\right[$ il faut que $a=\frac{3}{4}$

III. $\varphi(x)=f^{-1}\left(x^2\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

1- a) Dérivabilité de φ sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{cases} \left(x \overset{v}{\mapsto} x^2\right) \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\\ v\left(]0,+\infty[\right) =]0,+\infty[\subset [0,+\infty[\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f^{-1} \circ v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$\begin{cases} \left(x \overset{w}{\mapsto} \dfrac{1}{x^2}\right) \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\\ w\left(]0,+\infty[\right) =]0,+\infty[\subset [0,+\infty[\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f^{-1} \circ w$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Ainsi $\varphi = f^{-1} \circ v + f^{-1} \circ w$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\varphi'(x) = v'(x) \times \left(f^{-1}\right)'(v(x)) + w'(x) \times \left(f^{-1}\right)'(w(x)) = \cancel{2}x\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\cancel{2}\left(1+\left(x^2\right)^3\right)}\right] - \frac{\cancel{2}}{x^3}\left[\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}{\cancel{2}\left(1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^3\right)}\right] = 0$$

$\forall x \in]0,+\infty[\ \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x) = \text{constante}$

$\Rightarrow \forall x \in]0,+\infty[, \varphi(x) = \varphi(1) = 2 f^{-1}(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

b) Soit n ∈ IN*, $\varphi\left(\sqrt{n}\right) = f^{-1}(n) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{0,1,2,.....n\}$, on a : $0 \le k \le n \Rightarrow n \le n+k \le 2n$

et puisque f^{-1} est strictement croissante sur $[0,+\infty[\Rightarrow f^{-1}(n) \le f^{-1}(n+k) \le f^{-1}(2n)$

3- $U_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$

$0 < n \le n+k \le 2n \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2n} \le \dfrac{1}{n+k} \le \dfrac{1}{n}$

f^{-1} est strictement croissante sur $[0,+\infty[\Rightarrow f^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}\right) \le f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}\right) \le f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{0,1,2,\ldots..n\} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow (n+1)\, f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq (n+1)\, f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) = f^{-1}(0) = 0 \ ; \ \lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0 \text{ et } f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow (U_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

IV. $h(x) = f^{-1}(x+1)$

1- $h(x)$ existe si et seulement si $(x+1) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$\Rightarrow D_h = [-1,+\infty[$

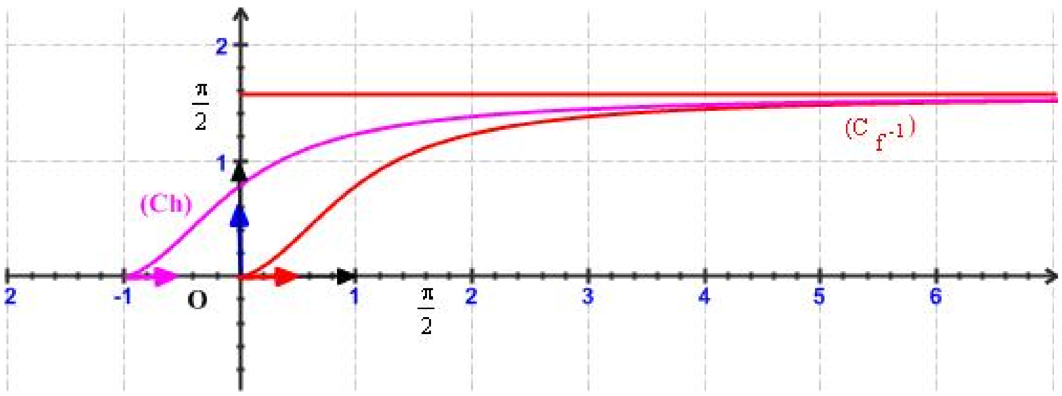
$h = f^{-1} \circ \psi$, où $\psi(x) = x + 1$

f^{-1} et ψ sont continues et strictement croissante $\Rightarrow h = f^{-1} \circ \psi$ est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$

(N.B : $h'(x) = \left(f^{-1} \circ \psi\right)'(x) = \psi'(x) \times \left(f^{-1}\right)'(\psi(x)) = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{2\left(1+(x+1)^3\right)}$, $\forall\, x \geq -1$)

x	-1		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$(C_h) = t_{-\vec{i}}\left(C_{f^{-1}}\right)$



2- $\forall x \in [-1,+\infty[\ 0 \le h(x) < \dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{5}{3}$

3- On admet que : $h'(x) < 1\ \forall x > -1$

Montrons que l'équation $h(x) = x$ admet une seule solution α dans $[-1,+\infty[$

$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$

On pose $h(x) - x = g(x)$

g est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et on a : $g'(x) = h'(x) - 1 < 0$, $\forall$ $x > -1$ ($g'_d(-1) = h'_d(-1) - 1 = -1$)

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	-1	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

g est continue et strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$

$0 \in]-\infty,1]$ donc il existe un réel unique $\alpha \in [-1,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow h(\alpha) = \alpha$

Montrons que $1 \le \alpha \le \dfrac{5}{3}$:

$g(1) = h(1) - 1 = f^{-1}(2) - 1 > 0$ (D'après I. 2- c))

$g\left(\dfrac{5}{3}\right) = h\left(\dfrac{5}{3}\right) - \dfrac{5}{3} \le 0$ car $\forall x \in [-1,+\infty[\ 0 \le h(x) \le \dfrac{5}{3}$

On a $g\left(\dfrac{5}{3}\right) \le g(\alpha) \le g(1)$ et g^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty,1] \Rightarrow 1 \le \alpha \le \dfrac{5}{3}$

4- $\begin{cases} v_0 = \dfrac{4}{3} \\ v_{n+1} = h(v_n) \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \le v_n \le \dfrac{5}{3}$

- Pour n = 0, $1 \le v_0 = \dfrac{4}{3} \le \dfrac{5}{3}$

- Pour n ≥ 0, supposons que $1 \le v_n \le \dfrac{5}{3}$ et montrons que $1 \le v_{n+1} \le \dfrac{5}{3}$

En effet : $1 \le v_n \le \dfrac{5}{3}$ et h est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$

$\Rightarrow\ 1 < h(1) \le h(v_n) \le h\left(\dfrac{5}{3}\right) \le \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow 1 \le v_{n+1} \le \dfrac{5}{3}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \le v_n \le \dfrac{5}{3}$

b) Montrons que : $\forall x \in \left]1, \dfrac{5}{3}\right[$ on a : $|h'(x)| \le \dfrac{4}{5}$.

$$|h'(x)| = \frac{3\sqrt{x+1}}{2\left(1+(x+1)^3\right)} \overset{?}{\le} \frac{4}{5}$$

$$1 < x < \frac{5}{3} \Rightarrow 2 < x+1 < \frac{8}{3} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{x+1} < \sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow 3\sqrt{2} < 3\sqrt{x+1} < \sqrt{24} \Rightarrow 3\sqrt{2} < 3\sqrt{x+1} < 2\sqrt{6}$$

$$2 < x+1 < \frac{8}{3} \Rightarrow 8 < (x+1)^3 < \frac{512}{27} \Rightarrow 9 < 1+(x+1)^3 < \frac{539}{27} \Rightarrow 18 < 2\left(1+(x+1)^3\right) < \frac{1078}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{1078} < \frac{1}{2\left(1+(x+1)^3\right)} < \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{x+1}}{2\left(1+(x+1)^3\right)} < \frac{2\sqrt{6}}{18} \Rightarrow |h'(x)| < \frac{\sqrt{6}}{9} < \frac{4}{5}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{4}{5}|v_n - \alpha|$?

h est continue sur $\left[1, \dfrac{5}{3}\right]$; h est dérivable sur $\left]1, \dfrac{5}{3}\right[$ et $|h'(x)| \le \dfrac{4}{5}$, $\forall x \in \left]1, \dfrac{5}{3}\right[$

$\forall n \in IN, v_n \in \left[1,\frac{5}{3}\right]$; $\alpha \in \left[1,\frac{5}{3}\right]$

$\Rightarrow \left|h(v_n)-h(\alpha)\right| \leq \frac{4}{5}\left|v_n-\alpha\right|$, $\forall$ n $\in$ IN.

Montrons que $\lim v_n = \alpha$?

On montre par récurrence que $\forall$ n $\in$ IN, $\left|v_n-\alpha\right| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \left|v_0-\alpha\right|$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n \left|v_0-\alpha\right| = 0$ car $\frac{4}{5} \in \left]-1,1\right[\Rightarrow \lim v_n = \alpha$