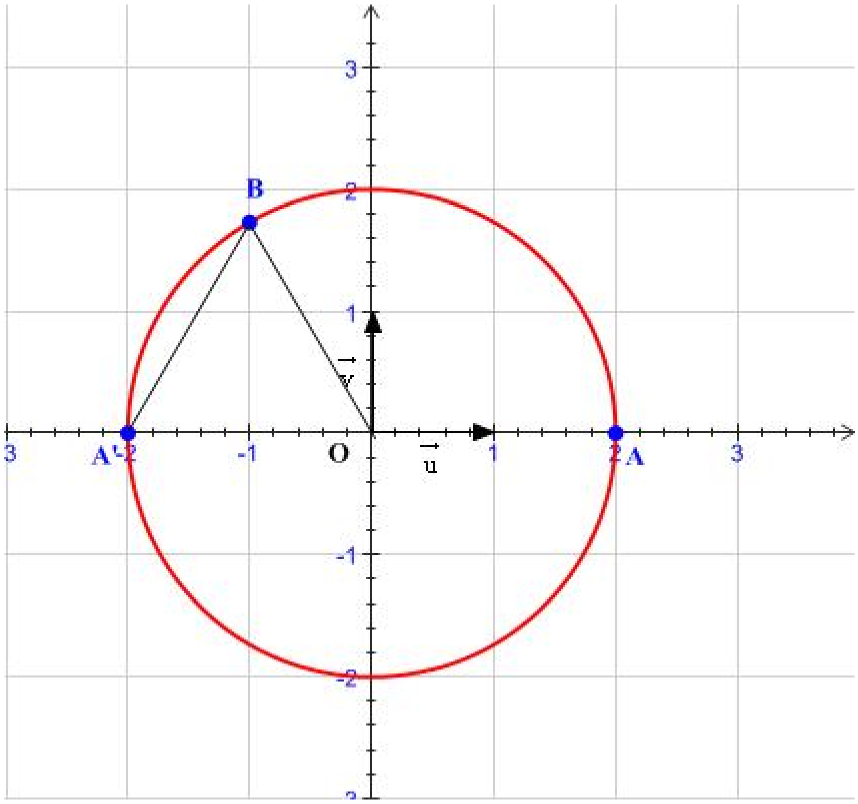
Exercice n°1 : ©

Dans la figure ci contre, $R=\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe. ζ est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point d'affixe z_B.



1. Déterminer par lecture graphique le module et un argument de z_B.

   En déduire que $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

2. a) Placer sur la figure le point C d'affixe $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

   b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

3. On se propose de déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z^3 soit un réel positif ou nul.

   a) Vérifier que les points O, A et B appartiennent à E.

   b) Prouver que tout point M de la demi – droite [OB) appartient à E.

   c) Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.

   Montrer que z^3 est un réel positif si et seulement si $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   d) En déduire que E est la réunion de trois demi – droites que l'on déterminera. Représenter E sur la figure.

Exercice n°2 :

On donne un plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ et un réel θ dans $\left]-\pi,\pi\right[$

On pose $z=\frac{1}{2}\left(1+e^{i\theta}\right)^2$

1. a) Calculer $\left(1+e^{i\theta}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}}$, en déduire que $\arg\left(1+e^{i\theta}\right)\equiv\frac{\theta}{2}[2\pi]$

b) Déterminer $|z|$ et arg(z)

c) Représenter dans le plan P l'image du nombre complexe z pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

2. On pose M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1, N le projeté orthogonal de A sur la droite (OM)

   a) Déterminer et construire l'ensemble E des points N lorsque θ varie.

   b) Calculer NM

3. Donner une construction (point par point) de l'ensemble E' des points M pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis pour $\theta \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Tracer E'.

Exercice n°3 :

$R = \left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

A, B, M et M' sont les points d'affixes respectives : 3, 2i, z différent de 3 et $z' = \dfrac{iz+2}{2z-6}$.

1. Déterminer z pour que l'on ait : $z' = \dfrac{1}{z}$.
2. a) Montrer que pour $z \neq 3$, on a : $|z'| = \dfrac{MB}{2MA}$.

   b) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{3, 2i\}$, on a : $\arg(z') \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.

3. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants : $E = \left\{M(z) / |z'| = \dfrac{1}{2}\right\}$, $F = \left\{M(z) / z' \in \mathbb{R}_+\right\}$

Exercice n°4 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : 1, $-\sin\alpha + i\cos\alpha$ et $-\sin\alpha - i\cos\alpha$ $\alpha \in [0, \pi]$.

1. Ecrire sous forme trigonométrique z_A, z_B et z_C.
2. Montrer que : AB = AC.
3. Déterminer en fonction de α, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
4. Déterminer α pour que ABC soit équilatéral.

Exercice n°5 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on associe à tout point M d'affixe z , nombre complexe non nul, le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{z}$.

1- Montrer que O, M et M' sont alignés
2- Donner une relation entre argz' et arg z.

3- Montrer que $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$

4- Soit ζ le cercle de centre Ω (1, 0) et passant par O. On suppose que $M \in \zeta \setminus \{O\}$.

a- Montrer que $|z-1| = 1$. En déduire que $|z'+1| = |z'|$

Interpréter géométriquement ce résultat.

b- En déduire une construction géométrique du point M' à partir du point M.

Exercice n°6 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points $A(e^{i\theta})$ et $B(e^{-i\theta})$ où $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ on associe $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta}$ où $z \neq \cos\theta$.

1. Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $(E): z^2-(2\cos\theta)z+1=0$, puis résoudre (E)

2. a) Montrer que pour tout $z \neq \cos\theta$ et $z \neq e^{-i\theta}$ on a : $\frac{z'-e^{i\theta}}{z'-e^{-i\theta}} = \left(\frac{z-e^{i\theta}}{z-e^{-i\theta}}\right)^2$

b) En déduire que si $M \neq A$ et $M \neq B$ on a $\frac{M'A}{M'B} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2$ et $\left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$

3. a) Montrer que si M appartient au cercle (ζ) de diamètre $[AB]$ alors $M' \in [AB]$.

b) (ζ) coupe $(O,\vec{u})$ en E et F. Montrer que E et F ont la même image par f qu'on précisera.

Exercice n°7 ©

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$(E): z^3-(2+5i)z^2+(8i-5)z+3(2-i)=0$$

1. a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique : **1.5 cm**), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, 1 et $3i$.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z' = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$.

Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par f.

Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

3. On pose $z = x+iy$ (avec x et y réels).

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

4. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

Tracer (D). Quelle remarque peut – on faire ?

5. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f .Montrer que M' appartient à la droite (D).

6. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z :

$\frac{z'-z}{z_A}=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\frac{z-\overline{z}}{3}$. En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b) En déduire, lorsque $M'\neq M$, la position relative des droites (OA) et (MM').

7. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)). Effectuer la construction sur la figure.

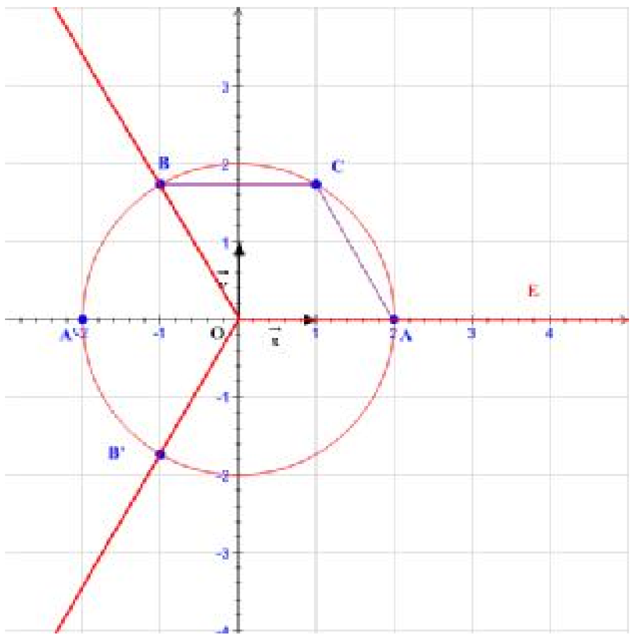
8. Soit M un point d'affixe $z=1+e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi[$.

a) Donner la forme exponentielle de z.

b) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble des points M, lorsque θ décrit $[0,\pi[$.

c) Déterminer z pour que M soit invariant par f.

Exercice n°1 :



1. $B \in \zeta \Rightarrow |z_B| = OB = 2.$

   $\text{Arg}(z_B) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

   $z_B = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.

2. a) $z_C = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z_C| = OC = 2$

   et $\arg(z_C) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OC}}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

   b) $OA = OB = 2$; $BC = |z_C - z_B| = 2$;

   $AC = |z_C - z_A| = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$

   $OA = OB = BC = OC \Rightarrow$ OACB est un losange.

3. $E = \{ M(z)$ tels que : $z^3 \in IR_+ \}$.

   a) $0^3 = 0 \in IR_+ \Rightarrow O \in E$; $2^3 = 8 \in IR_+ \Rightarrow A \in E$; $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{2i\pi} = 8 \in IR_+ \Rightarrow B \in E$.

   b) $M \in [OB] \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OB},\ k \in IR_+ \Leftrightarrow z = k \times z_B,\ k \in IR_+ \Rightarrow z^3 = k^3 \times {z_B}^3 \in IR_+ \Rightarrow M \in E$.

   c) Soit $z = re^{i\theta}$.

   $z^3 \in IR_+ \Leftrightarrow (re^{i\theta})^3 \in IR_+ \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} \in IR_+ \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

   d) $M(z) \in E \Leftrightarrow z^3 \in IR_+ \Leftrightarrow$

   $$\begin{cases} z = 0 \\ ou \\ z = re^{i\theta},\ \text{avec } \theta = \dfrac{2k\pi}{3}\quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ou \\ z = re^{i\theta},\ \text{avec } \theta = \dfrac{2k\pi}{3}\quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow$$

   $M \in [OA)$ $(k = 0)$ ou $M \in [OB)$ $(k = 1)$ ou $M \in [OB')$ $(k = 2)$ où B′ est le symétrique du point B par rapport à $(O,\vec{u})$

Exercice n°7 :

$$(E): z^3-(2+5i)z^2+(8i-5)z+3(2-i)=0$$

1) a) Soit iα, $\alpha \in$ IR, une solution imaginaire pur de (E)

$$\Rightarrow (i\alpha)^3-(2+5i)(i\alpha)^2+(8i-5)i\alpha+3(2-i)=0$$

$$\Rightarrow -i\alpha^3+(2+5i)\alpha^2+(-8-5i)\alpha+3(2-i)=0$$

$$\Rightarrow -i\alpha^3+2\alpha^2+5i\alpha^2-8\alpha-5i\alpha+6-3i=0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-8\alpha+6+i\left(-\alpha^3+5\alpha^2-5\alpha-3\right)=0,\ \alpha \in \text{IR}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2-8\alpha+6=0 \\ -\alpha^3+5\alpha^2-5\alpha-3=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=3$$

Ainsi 3i est une solution imaginaire pur de (E).

b) Résolution de (E)

$$z^3-(2+5i)z^2+(8i-5)z+3(2-i)=(z-3i)\left(z^2+bz+c\right)$$
$$=z^3+(b-3i)z^2+(c-3ib)z-3ic$$

Par identification :

$$\begin{cases} b-3i=-2-5i \\ c-3ib=-5+8i \\ -3ic=3(2-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2i \\ c=1+2i \end{cases}$$

$$(E): z^3-(2+5i)z^2+(8i-5)z+3(2-i)=(z-3i)\left(z^2-2(1+i)z+1+2i\right)=0$$

$\Leftrightarrow$ z = 3i ou $z^2-2(1+i)z+1+2i=0$ (a + b + c = 0 $\Rightarrow$ z = 1 ou z = 1 + 2i)

$S_{\mathbb{C}}=\{1,3i,1+2i\}$.

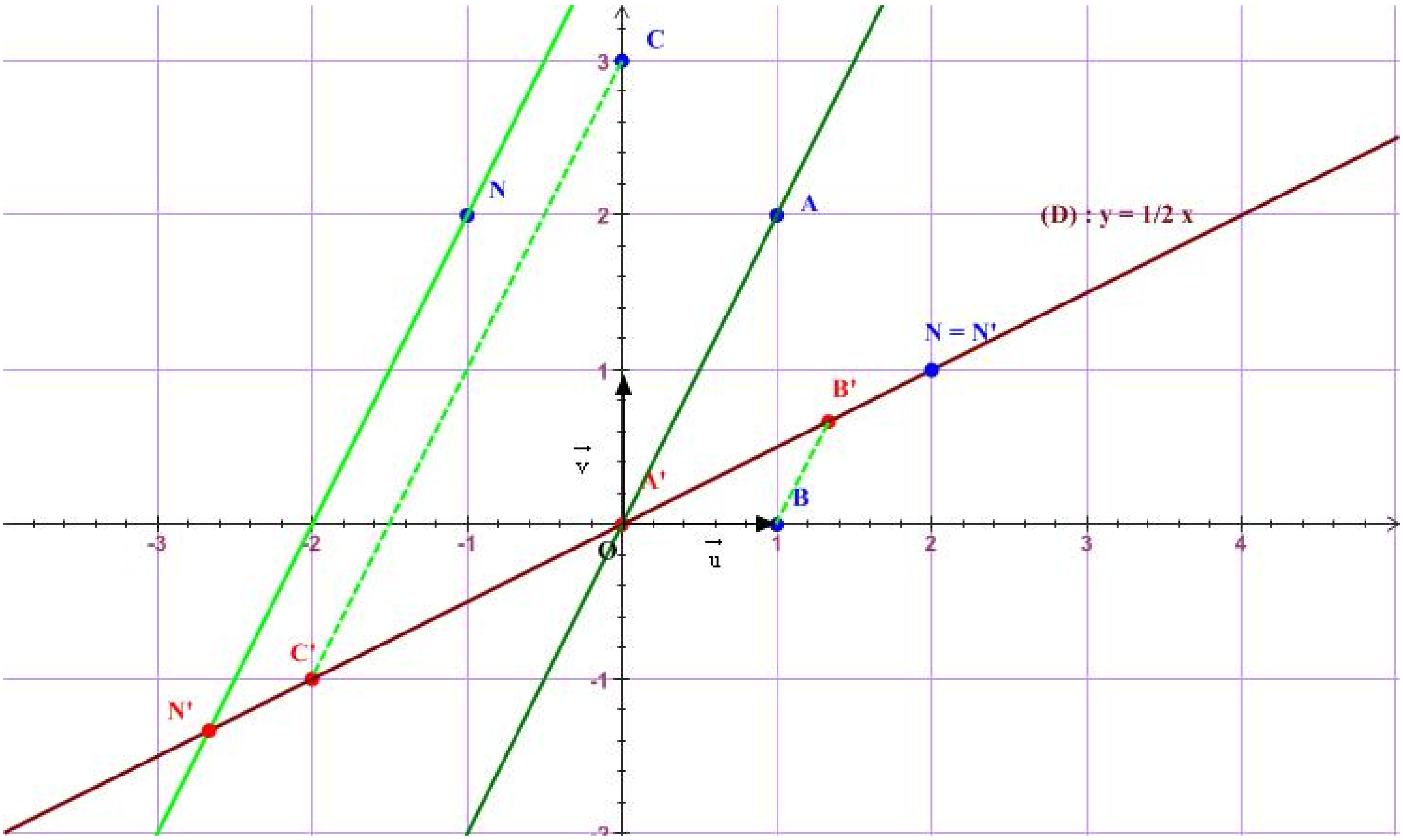
2) A(1 + 2i) ; B(1) ; C(3i).

$$z'=\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$$

- $z_{A'} = \dfrac{(3+4i)(1+2i)+5\left(\overline{1+2i}\right)}{6} = \dfrac{-5+10i+5-10i}{6} = 0 \Rightarrow$ A ′ = f(A) = O.

- $z_{B'} = \dfrac{(3+4i)\times 1+5\times 1}{6} = \dfrac{8+4i}{6} = \dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}i \Rightarrow$ f(B) = B ′ $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

- $z_{C'} = \dfrac{(3+4i)\times 3i+5\times(-3i)}{6} = \dfrac{-12-6i}{6} = -2-i \Rightarrow$ f(C) = C ′ (-2, -1).



3) $z = x + iy$

$$z' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{8x-4y}{6} + i\frac{4x-2y}{6} = \frac{4x-2y}{3} + i\frac{2x-y}{3}$$

$\Rightarrow$ Ré(z ′) = $\dfrac{4x-2y}{3}$ et Im (z ′) = $\dfrac{2x-y}{3}$.

4) Ensemble des points invariants par f.

f(M) = M $\Leftrightarrow$ z ′ = z $\Leftrightarrow$ $\dfrac{4x-2y}{3} = x$ et $\dfrac{2x-y}{3} = y \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x$. Ainsi Inv($f$) = (D) : $y = \dfrac{1}{2}x$.

On remarque que Les points A ′, B ′ et C ′ sont sur la droite (D).

C'est-à-dire A ′, B ′ et C ′ sont trois points invariants par *f*.

5) Soit M ′ = *f*(M) et M(x, y) $\Rightarrow$ M ′ ($\frac{4x-2y}{3}, \frac{2x-y}{3}$)

Les coordonnées du point M ′ vérifient l'équation $Y = \frac{1}{2}X$ de la droite (D) $\Rightarrow$ M ′ $\in$ (D).

6) a) $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{\frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}-z}{1+2i} = \frac{(-3+4i)z+5\overline{z}}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)(1-2i)z+5(1-2i)\overline{z}}{30}$

$= \frac{5(1+2i)z+5(1-2i)\overline{z}}{30} = \frac{(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}}{6} = \frac{z+\overline{z}}{6} + i\frac{z-\overline{z}}{3}$

En posant z = x + i y, on aura $z+\overline{z} = 2x$ et $z-\overline{z} = 2iy$ $\Rightarrow$ $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{2x}{6} + i\frac{2iy}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \in IR$.

b) $M' \neq M$, $\frac{z'-z}{z_A} \in IR$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ (MM′) et (OA) sont parallèles.

7) Construction de N ′ à partir de N :

- Si N $\in$ (D) $\Rightarrow$ N ′ = N
- Si N $\notin$ (D) $\Rightarrow$ N ′ $\in$ (D) (Question 5) et (NN′) // (OA).

Il sagit bien d'une projection sur (D) parallèlement à (OA).

8) $z = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$

a) $z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\underbrace{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}_{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{>0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Soit M(x, y) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 1+\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, \pi[$

Trouvons une relation entre x et y :

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$, avec $0 < x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$.

L'ensemble des points M(x, y) a pour équation : $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ 0 < x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

c) M est invariant par f ⇔ M ∈ (D) ⇔ $y = \frac{1}{2}x$, or $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{5}{4}x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{à rejeté}} \text{ ou } x = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{5} \text{ et } y = \frac{1}{2}x = \frac{4}{5} \Rightarrow z = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i.$$