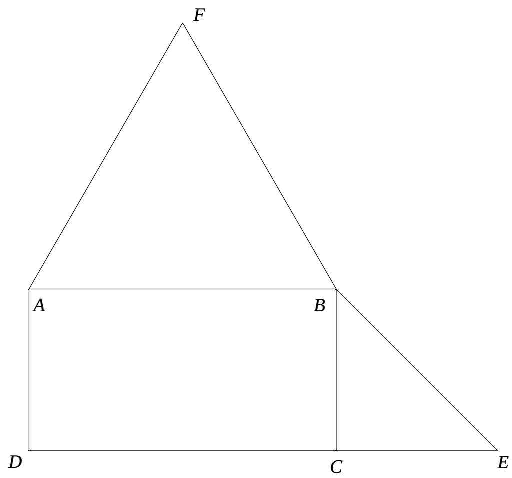
Exercice n°1 ©

La figure ci-dessous représente un rectangle $ABCD$ tel que : $AB = 5$ et $BC = 3$; un triangle ABF équilatéral et un triangle BCE rectangle et isocèle en C. Le point H est le milieu du segment $[AB]$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$; 2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$; 3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$; 4. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}$; 5. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}$; 6. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}$.

Exercice n°2 ©

Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=7$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=13$, calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{u}+3\vec{v})$.

2. $(\vec{u}-2\vec{v})^2$.

Exercice n°3

On considère un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

Exercice n°4

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 7$ et $BC = 5$.

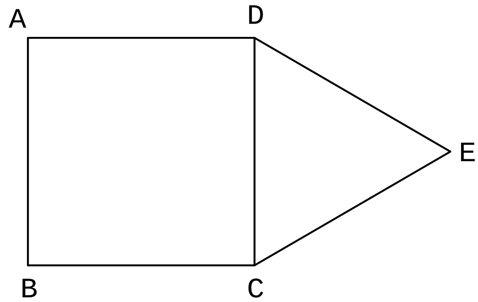
1. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

2. En déduire la valeur exacte du sinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

3. On note I le milieu de $[AB]$. Calculer la longueur CI.

4. On note J le projeté orthogonal du sommet B sur le côté $[AC]$. Calculer la longueur BJ.

Exercice n°5 ©



$ABCD$ est un carré de côté a et DCE est un triangle équilatéral.

On s'intéresse au triangle BDE.

a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.
On pourra utiliser une projection orthogonale.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.

c. En déduire l'égalité $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

d. Utiliser ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$ puis en déduire BE.

Exercice n°6 ©

1. Montrer que pour tout parallélogramme *ABCD*, on a :

$$AB^2+AD^2=\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right).$$

2. Résoudre le système S : $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$.

3. On considère un parallélogramme *ABCD* dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle : $BD=\sqrt{13}$; $AC=\sqrt{37}$ et $\hat{A}=60°$. On note : $x=AB$ et $y=AD$.

a) En utilisant le résultat de la question 1., montrer que : $x^2+y^2=25$ (1).

b) En utilisant l'angle $\hat{A}$, montrer que : $x^2+y^2-xy=13$ (2).

c) Montrer que le système constitué des équations (1) et (2) est équivalent au système S de la Q.2.

d) Conclure quant aux dimensions du parallélogramme *ABCD*.

Exercice n°7

Dans un plan P on donne un rectangle $ABCD$ tel que $AB=2BC=4$.

On note $O=A*B$. $J\in[CD]$ tel que $CJ=1$ et I le point d'intersection des deux droites (AC) et (BJ).

1- a) Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CJ}$. En déduire que $(AC)\perp(BJ)$.
b) Calculer BJ puis la distance du point B à la droite (AC).

2- Soit $F=\left\{M\in P \text{ tel que } MA^2+MB^2=24\right\}$. Déterminer et construire l'ensemble F.

3- On note H le point du plan défini par $BH=2\sqrt{3}$ et $\widehat{ABH}=\frac{\pi}{6}$ et E le point tel que $\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HE}=\vec{0}$.

a) Calculer AH et en déduire la nature du triangle ABH.

b) Soit $F'=\left\{M\in P \text{ tel que } MB^2+2ME^2=30\right\}$. Vérifier que $A\in F'$ puis déterminer et construire F'.

Exercice n°8 : ©

Soient ABC un triangle rectangle en A, G son centre de gravité et $I = B * C$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right)$; $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$.

   b) Montrer que : $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = -\frac{2}{9} BC^2$.

2) Soit $f : P \to \mathbb{R}, M \mapsto f(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{MG}$.
   a) Calculer $f(A)$ et $f(G)$ en fonction de BC.
   b) Montrer que pour tout M de P on a : $f(M) = MG^2 - \frac{2}{9} BC^2$.
   c) En déduire l'ensemble S des points du plan P tels que : $f(M) = -\frac{1}{9} BC^2$.

3) R= $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ étant un repère orthonormé du plan. On donne A (1,6) ; B (-2,3) et C (4,3).
   a) Vérifier que ABC est un triangle rectangle en A.
   b) Déterminer les coordonnées de G.
   c) Donner une équation cartésienne de l'ensemble S.

Exercice n°9 :

Soient A et B deux points donnés du plan et I le point défini par $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$ et C un point de la perpendiculaire à la droite (AB) en I. On donne AB = 3 et IC = 2.

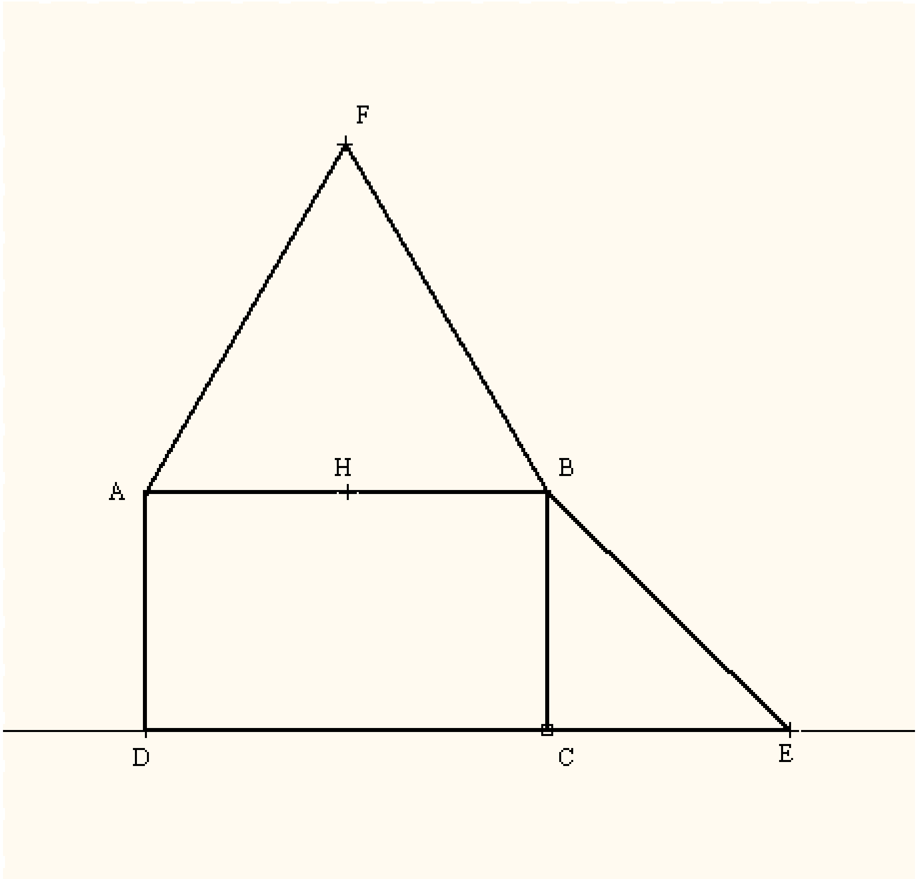
1. Construire les points A, B, I et C.
2. Montrer que $CA^2 + 2CB^2 = 18$.
3. Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 18 + 6\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CI}$.
4. On considère Δ l'ensemble des points M de P tels que $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 42$.
   a) Montrer que Δ est une droite dont on précisera la direction.
   b) Montrer que Δ est tangente au cercle (C) de centre C et passant par I.

Exercice n°10 :

Soit (C) le cercle circonscrit à un triangle ABC, D le point diamétralement opposé à A et I le milieu du segment [BC].

1. Montrer que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$ et que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{AB^2 + AC^2}{2} = AI^2 + BI^2$.
4. On suppose dans cette question que : $AB = 5x$; $AC = 2\sqrt{3}x$ où $x > 0$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
   Calculer BC, calculer ensuite la longueur de la médiane AI.

Exercice n°1 :



1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{25}{2}$

2.

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$ car C est le projeté orthogonal de E sur (BC)

$= BC^2 = 9$

3.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ car H = $p^{\perp}_{(AB)}(F)$

$= \frac{25}{2}$

4.

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}$ car C = $p^{\perp}_{(CE)}(B)$

= - CD $\times$ CE car $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de sens contrires

= - 15

5. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA} = BE\times BA\times\cos\widehat{ABE} = 3\sqrt{2}\times 5\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -15$

6. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE} = 0$ car $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CE}$

Exercice n°2 :

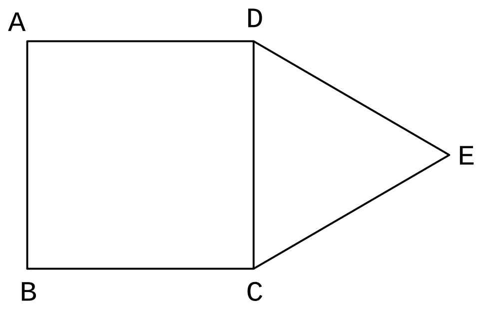
$\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 13$

1. $\vec{u}\cdot(\vec{u}+3\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+3\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 3\vec{u}\cdot\vec{v} = 9+39 = 48.$

2. $(\vec{u}-2\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 9-52+196 = 153$

Exercice n°5 :

a. $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{DH}$ où H = $p^{\perp}_{(DC)}(E)$ = D $*$ C



$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}DC^2 = \frac{a^2}{2}$

b. $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DE} = DA\times DE\times\cos\widehat{ADE} = a\times a\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = a^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

c. $\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DE} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$

d. $BE^2 = \overrightarrow{BE}^2 = \left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\right)^2 = BD^2+DE^2+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DE} = BD^2+DE^2-2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}$

$\Rightarrow$ BE² = $\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 - a^2\left(1-\sqrt{3}\right) = 2a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2\left(2+\sqrt{3}\right).$

$\Rightarrow$ BE = $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Exercice n°6 :

1. ABCD est un parallélogramme.

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

On prend $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on aura : $AB^2 + AD^2 = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BD^2\right)$

2. $\begin{cases} x+y=S=7 \\ xy=P=12 \end{cases}$

S² - 4P = 1 > 0 $\Rightarrow$ x et y existent et sont les solutions de l'équation : X² - SX + P = 0

X² - SX + P = 0 $\Leftrightarrow$ X² - 7X + 12 = 0

Δ = S² - 4P = 1 $\Rightarrow$

$$X = \frac{7-1}{2} = 3 \text{ ou } X = \frac{7+1}{2} = 4$$

Ainsi : $S_{IR^2} = \{(3,4);(4,3)\}$

3. $BD = \sqrt{13}$; $AC = \sqrt{37}$ et $\hat{A} = 60°$. On note : $x = AB$ et $y = AD$.

a)

$$AB^2 + AD^2 = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BD^2\right) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left(37+13\right) = 25$$

b) En utilisant le théorème d'EL Kashy dans le triangle ABD, on obtient :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 13 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60° \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 13$$

c)

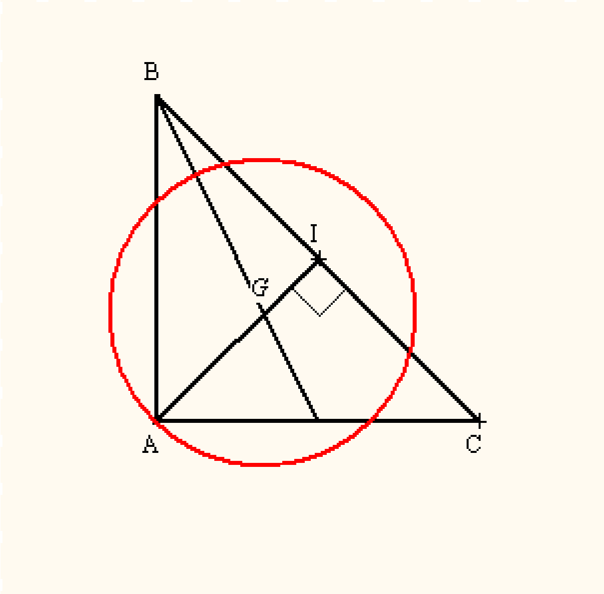
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2-xy=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=25-13=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy=49 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} (x \text{ et } y \geq 0)$$

d)

$x = AB$ et $y = AD$ sont les solutions du système (S) $\Rightarrow$ $x = AB = 4$ et $y = AD = 3$ ou

$x = AB = 3$ et $y = AD = 4$.

Exercice n°8 :



1. a)

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)$$

De même :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$$

b)

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\right)=\frac{1}{9}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{2}{9}BC^2$$

2.

$$f:P\to\mathbb{R},M\mapsto f(M)=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{MG}$$

a)

$$f(A)=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{0}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AG}=-AG^2=-\frac{4}{9}AI^2 \text{ car } \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

Or AI = $\dfrac{BC}{2}\Rightarrow f(A)=-\dfrac{4}{9}\times\dfrac{BC^2}{4}=-\dfrac{1}{9}BC^2$

$$f(G)=\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\underbrace{\overrightarrow{GG}}_{\vec{0}}=\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=-\frac{2}{9}BC^2$$

b)

$$f(M)=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{MG}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{MG}$$

$$=MG^2+\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{-\overrightarrow{GA}}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{MG}$$

$$=MG^2+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{AG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right)}_{\vec{0}}=MG^2-\frac{2}{9}BC^2$$

c)

$$f(M)=-\frac{1}{9}BC^2\Leftrightarrow MG^2-\frac{2}{9}BC^2=-\frac{1}{9}BC^2\Leftrightarrow MG^2=\frac{1}{9}BC^2\Leftrightarrow MG=\frac{1}{3}BC\Leftrightarrow M\in\zeta_{\left(G,\frac{1}{3}BC\right)}$$

Ou bien S est le cercle de centre G et passant par A.

3. A (1,6) ; B (-2,3) et C (4,3).

a)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=-3\times3+(-3)\times(-3)=0$$

$\Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

b) G centre de gravité du triangle ABC

$$\Rightarrow G\left(\frac{1-2+4}{3},\frac{6+3+3}{3}\right)\Rightarrow G(1,4)$$

c) S est le cercle de centre G et de rayon GA

$$GA=\sqrt{(1-1)^2+(6-4)^2}=2$$

S : $(x-1)^2+(y-4)^2=4$.