Lycée ELHENCHA | DEVOIR DE SYNTHESE N°2 | Classe : 3ème Sc
Prof : ElEuchi.H | Mathématiques |
Date : 14/03/2024 | | Durée : 2H

Exercice N°1 (3pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

I/ a-Résoudre , dans $\mathbb{C}$, l'équation $\boldsymbol{z^2-2z+4=0}$.

b- Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

II/ On considère le point I d'affixe $\boldsymbol{z_I=2i}$

A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $\boldsymbol{z'=\frac{iz+1}{z-2i}}$

Déterminer l'ensemble E $=\{M(z)\epsilon P \; tel\; que\; z'est\; imaginaire\; pur\}$

Exercice N°2 (4pts) :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $\boldsymbol{z'=\frac{-1}{\bar{z}}}$

1°/a- Vérifier que $\boldsymbol{z'=\frac{-z}{|z|^2}}$

b- Déduire que les points O , M, et M' sont alignés.

2°/ Montrer que $\boldsymbol{\overline{z'+1}=\frac{1}{z}(z-1)}$

3°/On donne $\boldsymbol{z_A=1\; et\; z_B=-1}$

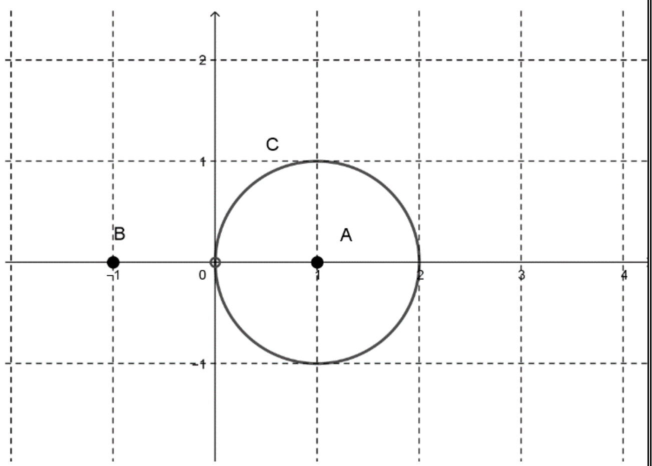
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et passant par O et privé de O .

on suppose que $\boldsymbol{M\in\mathcal{C}}$.(voir figure)

a- Vérifier que $\boldsymbol{|z-1|=1}$

b- Montrer que $\boldsymbol{|z'+1|=|z'|}$.interpréter géométriquement cette relation.

4°/En déduire une construction géométrique de M' à partir de M.



Exercice N°3 (5pts) :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=\frac{4x-4}{x^2-2x+2}}$

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

1°/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\; et\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

2°/a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\boldsymbol{f'(x)=\frac{-4x^2+8x}{(x^2-2x+2)^2}}$

b- Dresser le tableau de variation de f .

3°/ a- Montrer que $A(1{,}0)$ est un centre de symétrie de C_f

b- Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A.

c-Etudier la position de $C_f\; et\; T$.

4°/ tracer $C_f\; et\; T$.

Exercice N°4 (3pts) :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
La courbe (C) ci-dessous est celle d'une fonction f .
- La droite Δ: $y = -2$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$
- La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(o,\vec{\imath})$ au voisinage de $+\infty$

En utilisant les données et le graphique, déterminer :

1) a. f(1) , f(−1) , f(3)

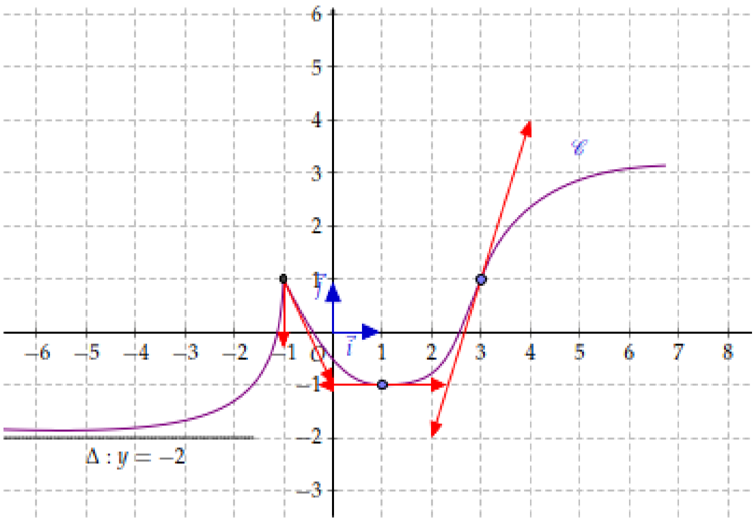
b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) a. $f'(1)$ et $f'(3)$

b. $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x)-1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{f(x)-1}{x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{f(x)-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

d-Estimer $f(3.001)$



Exercice N°5 (5pts) :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $R = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les points $A(1,1,0)$ $B(1,-2,3)$ et $C(0,1,2)$.

1) a. Montrer que les points C , A , et B déterminent un plan .

b- déterminer une équation cartésienne du plan $P = P(ABC)$.

On prend dans la suite $\boldsymbol{P: 2x + y + z - 3 = 0}$

2) On désigne par Q le plan passant par $\boldsymbol{J(1\,,1\,,1)}$ et dont un vecteur normal $\boldsymbol{\vec{N} = -\vec{\imath} + 2\vec{k}}$

a. Déterminer une équation cartésienne de Q.

b. Montrer que P et Q sont perpendiculaires .

c. Soit $\Delta = P \cap Q$, Montrer qu'une représentation paramétrique de Δ est:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 5 - 5\alpha \quad ;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

d. Soit $\boldsymbol{R: x + y - z = 0}$, déterminer le point d'intersection du plan R et la droite Δ.

3) Soit $\boldsymbol{R_m: (2m+1)x + my + (m-2)z + 1 - 3m = 0}$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$

a. Montrer que R_m est un plan pour tout réel m .

b. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a : $\Delta \subset R_m$

c. Déterminer **m** pour que $P \perp R_m$.