Mathématiques

$4^{\text{ème}}$ Math

Devoir de synthèse N°01

Durée : 3 heures

Professeur :

Elabidi Zahi

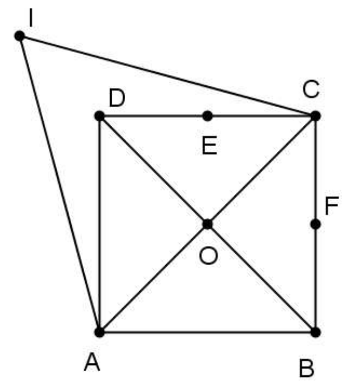
Exercice 01 : (6 points)

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

E et F sont les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[CB]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = B$ et $f(E) = F$
   b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre
   c) Déduire que $f(D) = C$
2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(D) = C$ et $g(C) = B$
   Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
3) Montrer que $g = f \circ S_{(CD)}$



4) Soit I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct
   a) Caractériser les isométries $S_{(AI)} \circ S_{(AD)}$ et $S_{(ID)} \circ S_{(IA)}$
   b) Déduire la nature et les caractéristiques de $h = r_{\left(I,\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{\pi}{6}\right)}$
   c) On pose $T = f \circ h$. Déterminer $T(A)$
      Donner la nature et les éléments caractéristiques de T
   d) Déduire que $g^{-1} \circ f \circ T$ est une symétrie glissante qui transforme D en C
5) On suppose que $AB = 1$ et on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
   Soit φ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\overline{z} + 2 + i$
   a) Montrer que φ est un antidéplacement
   b) Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$.
   c) En déduire que $\varphi = g$

Exercice 02: (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $-i$, i et 1

A tout point M d'affixe z distinct de $-i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{z+i}$

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit réel
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ lors que M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1
3) a) Vérifier que $(z'-1)(z+i) = -2i$
   b) En déduire que pour tout point distinct de A
   $CM'.AM = 2$ et $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{CM'}}) \equiv -(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}) - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

c) Montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on caractérisera

d) Montrer que si M appartient à la demi droite $[AC)$ privé de A alors M' appartient à la demi droite $[CA)$ privé de C

4) On pose $z = e^{i\alpha}$ où α est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $e^{i\alpha} + i = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et que $e^{i\alpha} - i = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

b) En déduire la forme exponentielle de z'

c) Soit E le point d'affixe $e^{i\alpha}$. Montrer que : ABE est triangle rectangle

d) Déterminer la valeur de α pour que ABE soit isocèle en E

Exercice 03 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1;1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1;1[$ et que pour tout $x \in]-1;1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1;1]$ une unique solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{5}$

e) Tracer ζ

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1;1]$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer la courbe ζ' de f^{-1} dans le même repère que f

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

3) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi[$ par $g(x) = 1 - f(\cos x)$

a) Montrer que pour tout $x \in [0;\pi[$, $g(x) = 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-\infty;1]$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty;1]$ et que pour tout $x \in]-\infty;1]$,

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = -\frac{2}{1+(1-x)^2}$$

4) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par $\varphi(x) = g^{-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

a) Montrer que φ est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $\forall x \in]-\infty;1[$, $\varphi'(x) = -\left(g^{-1}\right)'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in]-\infty;1[$, $g^{-1}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - g^{-1}(x)$

5) Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} g^{-1}\left(\frac{1}{1-k}\right)$$

a) Montrer que pour tout $n+1 \le k \le 2n$, on a : $g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \le g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \le g^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \le u_n \le g^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)$ puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \pi - u_n$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$