Equation différentielle (bac exp) Mr. FATNASSI BECHIR

EXO (ENONCE)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - y = 4\cos(x)$: où *y* désigne une fonction de la variable réelle *x* définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1°/ Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$

2°/ Déterminer les deux nombres réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit solution de l'équation (E)

3°/ a / Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0)

b / En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

EXO (SOLUTION)

1°/ Les solutions de (E_0) : $y' = y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = k.e^x$ avec k une constante réelle.

2°/ La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = -a\sin(x) + b\sin(x)$

g est une solution de $(E) \Leftrightarrow g'(x) - g(x) = 4\cos(x)$

$\Leftrightarrow -a\sin(x) + b\cos(x) - a\cos(x) - b\sin(x) = 4\cos(x)$

$\Leftrightarrow (b-a)\cos(x) - (a+b)\sin(x) = 4\cos(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 4 \\ b + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Donc : pour tout réel x : $g(x) = -2\cos(x) + 2\sin(x)$

3°/ a / • on a : $g'(x) - g(x) = 4\cos(x)$

- f est une solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4\cos(x)$
- $f - g$ est une solution de $(E_0) \Leftrightarrow (f-g)'(x) - (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) - f(x) + g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4\cos(x)$

$\Leftrightarrow$ f est une solution de (E)

b / f est une solution de $(E) \Leftrightarrow$ $f - g$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = ke^x \Leftrightarrow f(x) = g(x) + ke^x$

$\Leftrightarrow f(x) = -2\cos(x) + 2\sin(x) + ke^x$

Conclusion : pour tout réel x : $f(x) = -2\cos(x) + 2\sin(x) + ke^x$ où k est un paramètre réel.

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR