Exo. n° 9 : (Enoncé)

On considère la suite U définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1} \end{cases}$; pour $n \geq 0$

1°/ a / Montrer, par récurrence, que : Pour tout $n \geq 0$: $1 < U_n < 2$

b / Montre que (U_n) est croissante .

c / Déduire que (U_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

2°/ Soit (V_n) la suite réelle définie sur ℕ par : $V_n = \ln(U_n - 1)$

a / Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b / Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

c / En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exo. n°9 : (Solution)

On considère la suite U définie sur ℕ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et pour $n \geq 0$: $U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}$:

1°/ a / Soit la propriété : P(n) : $1 < U_n < 2$ pour tout $n \geq 0$

∗ On a pour $n = 0$ $\rightarrow$ $1 < U_0 = \frac{3}{2} < 2$ donc $P(0)$ est vraie.

∗ On suppose que : $1 < U_n < 2$ et on montre que : $1 < U_{n+1} < 2$

On a : $1 < U_n < 2 \Rightarrow 0 < U_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{U_n - 1} < 1$

$\Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{U_n - 1} < 2 \Rightarrow 1 < U_{n+1} < 2$

Conclusion : Pour tout $n \geq 0$: $1 < U_n < 2$

b / $U_{n+1} - U_n = 1 + \sqrt{U_n - 1} - U_n = \sqrt{U_n - 1} - (U_n - 1)$

$$= \frac{\left[\sqrt{U_n - 1} - (U_n - 1)\right]\left[\sqrt{U_n - 1} + (U_n - 1)\right]}{\sqrt{U_n - 1} + (U_n - 1)}$$

$$= \frac{(U_n - 1) - (U_n - 1)^2}{\sqrt{U_n - 1} + (U_n - 1)} = \frac{(U_n - 1)(1 - (U_n - 1))}{\sqrt{U_n - 1} + (U_n - 1)} = \frac{(U_n - 1)(2 - U_n)}{\sqrt{U_n - 1} + (U_n - 1)}$$

On a : pour tout $n \geq 0$: $1 < U_n < 2 \Rightarrow \begin{cases} U_n - 1 > 0 \\ 2 - U_n > 0 \end{cases} \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$

Donc : (U_n) est croissante

c / La suite (U_n) est croissante et majorée par **2** , donc elle est convergente vers une limite ℓ : pour tout $n \geq 0$: $1 < U_n < 2 \Rightarrow 1 \leq \ell \leq 2$

La fonction f : ℝ → ℝ définie par $f(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc elle est continue en ℓ

$$\begin{cases} f \text{ est continue en } \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(U_n) = f(\ell) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = f(\ell)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ donc $f(\ell) = \ell$ (D'après l'unicité de la limite)

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\ell - 1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell - 1} = \ell - 1 \Leftrightarrow \ell - 1 = (\ell - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (\ell - 1)^2 - (\ell - 1) = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell - 2) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2$$

Pour tout $n \geq 0$, $U_n \geq U_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \ell = 2 \Rightarrow \boxed{\ell = 2}$

2°/ Pour tout $n \geq 0$ $V_n = \ln(U_n - 1)$

a / Pour tout $n \geq 0$

$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - 1) = \ln\left(1 + \sqrt{U_n - 1} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{U_n - 1}\right) = \frac{1}{2}\ln(U_n - 1) = \frac{1}{2} V_n$$

Donc : V est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$$V_0 = \ln(U_0 - 1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

b / $*$ On a $-1 < q = \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

$*$ Pour tout $n \geq 0$: $V_n = \ln(U_n - 1) \Leftrightarrow e^{V_n} = U_n - 1 \Leftrightarrow U_n = 1 + e^{V_n}$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + e^{V_n}\right) = \lim\limits_{t \to 0} \left(1 + e^{t}\right) = 2 \Rightarrow \boxed{\ell = 2}$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR
LYCEE SECONDAIRE DE KORBA