

Prof : Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. (Matrices)

EXO. : (Enoncé)

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

1°/ a / Calculer le déterminant de la matrice A et en déduire qu'elle est inversible.

b / Calculer : $A \times B$ et en déduire A^{-1} la matrice inverse de A..

2°/ a / Calculer A^2

b / Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = \theta$; où I_3 est la matrice unité d'ordre 3 et θ est la matrice nulle

c / Retrouver A^{-1}

EXO. : (Solution)

$$1^\circ / a / \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = -28 - (-30) - 0 + 0 = 2$$

On peut aussi calculer le déterminant de A comme suit :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ = [1 \times (-4) \times 7 + 0 \times 10 \times 0 + 0 \times 0 \times (-3)] - [0 \times (-4) \times 0 + (-3) \times 10 \times 1 + 7 \times 0 \times 0]$$

On a : $\det(A) = 2 \neq 0$ donc A est inversible .

$$b / A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } A \times B = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I_3 \text{ donc A est inversible et on a :}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

FATNASSI BECHIR

2°/ a /

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+16-30 & 0-40+70 \\ 0+0+0 & 0+12-21 & 0-30+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} / A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta$$

$$\mathbf{c} / A^2 - 3A + 2I_3 = \theta \Leftrightarrow 2I_3 = -A^2 + 3A \Leftrightarrow A(-A + 3I_3) = 2I_3$$

$$\text{Donc } A \text{ est inversible et on a : } A^{-1} = \frac{1}{2}(-A + 3I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

FATNASSI BECHIR

Prof : Mr. FATNASSI BECHIR