Ministère de l'éducation	***Devoir de contrôle n°3***	Mr. FATNASSI. B
Lycée secondaire de Korba	***Durée deux heures***	4. Exp. Le 5 .4. 2016

Exercice n°1 : (6 pts)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 25y = 0$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1) Résoudre l'équation (E).

2) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est solution de l'équation différentielle (E) ;
- la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6};-2\right)$
- $f'(0) = -5$.

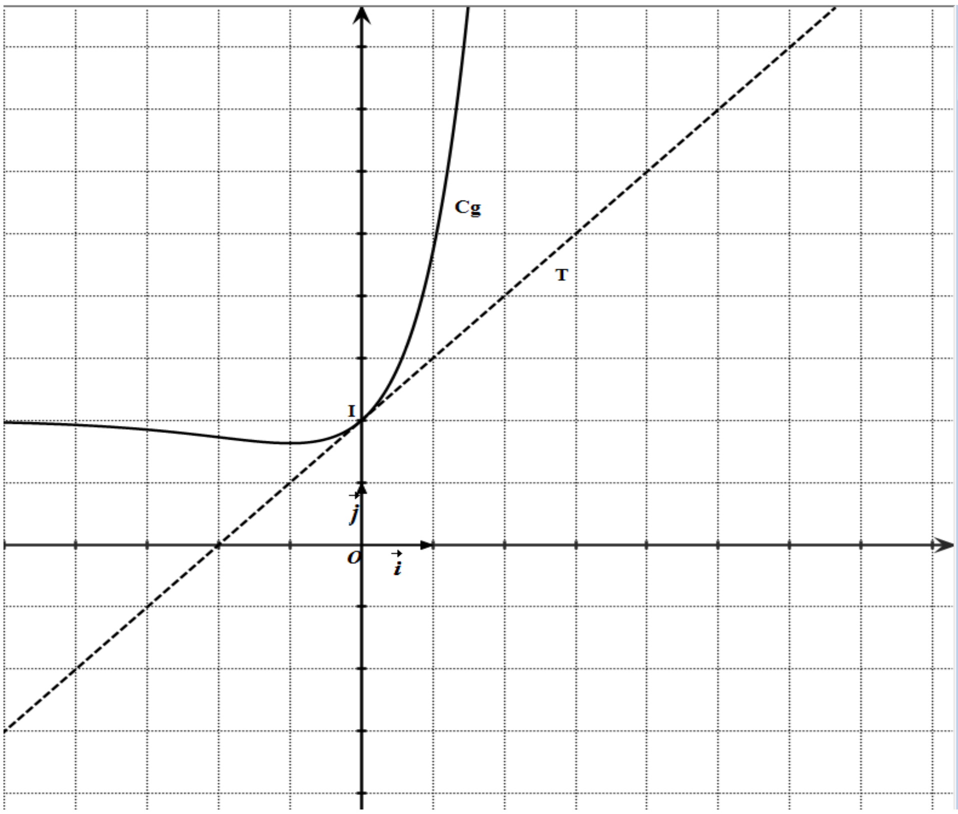
Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

3) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$

4) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice n°2 : (7 pts)

I /



La courbe (C_g) tracée ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

La droite d'équation : $y = 2$ est une asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$

La courbe (C_g) admet une tangente (T) au point d'abscisse 0

1°/ Déterminer graphiquement :

a / $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

b / Déterminer g(0) ; et g'(0)

2°/ On admet que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a + bx.e^{x}$

a / Calculer $g'(x)$

b / En utilisant 1°/b) et 2°/a) montrer que : $g(x) = 2 + x.e^{x}$.

II / On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + (x-1).e^{x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°/ a / Calculer les limites de f aux bornes en $-\infty$ et $+\infty$.

b / Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$ puis étudier la position de (C_f) par rapport à (D)

c / Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°/ **a** / Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

b / Démontrer que l'équation $f(x) = \mathbf{0}$ admet , dans l'intervalle $[0,1]$,une seule solution $\boldsymbol{\alpha}$.

Et que $\mathbf{0{,}4} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0{,}5}$.

c / Détermine les coordonnées du point de où la tangente (T') est parallèle à la droite (D).

3°/ Tracer (T') , l' asymptote (D) et (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4°/ a / Utiliser une intégration par parties pour calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine limité par la courbe (C_f) la droite (D) ; et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$

b / Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = \dfrac{2\alpha(\alpha-2)}{\alpha-1} - e$.

<u>Exercice n°3 :</u> (7 pts)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'Indice du PIB par habitant en Turquie :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
PIB y_i	35,8	33,2	34,8	36	38,8	41,9	44,2	45,6

1°) a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$ dans le repère orthogonal

b) Donner l'équation de la droite *D* d'ajustement affine de *y* en *x* obtenue par la méthode de Mayer Les calculs seront faits à la calculatrice et les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

c) Tracer la droite *D* dans le repère précédent.

2°) Une deuxième estimation du taux de croissance. On pose *z* = ln *y* :

a) Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	3,58							

b) Déterminer le coefficient de corrélation $r_{(x,z)}$. Interpréter le résultat obtenu. ?

c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de *z* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés.

d) En déduire l'expression de *y* en fonction de *x* de la forme $y = c\,e^{dx}$

e) À l'aide de l'ajustement obtenu à la question 2.d, déterminer l'année à partir de laquelle, l'indice du PIB par habitant en Turquie sera supérieur à 100.