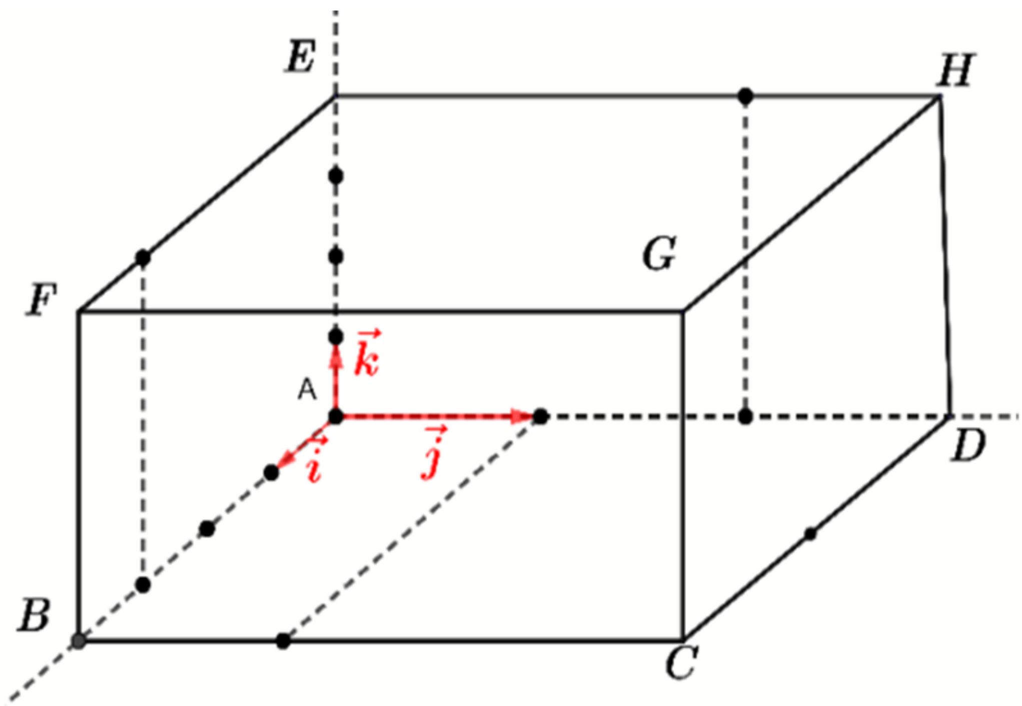
Douma Ali | 3ème Sciences | 05/02/2023

Série N°7

Exercice N° 1

L'espace est muni d'un repère $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ .Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que : $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{k}$.
On considère les points $I(4,1,0)$, $J(0,2,4)$, $K(3,0,4)$ et $L(a,3,0)$
avec a un réel de l'intervalle $[0,4]$.

1. Placer dans la repère $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ les points I, J et K .
2. Déterminer l'ensemble des points L lorsque a décrit l'intervalle $[0,4]$.
3. Déterminer a pour que les points I, J, K et L soient coplanaires .
   Dans la suite de l'exercice , on prend $a = 1$.
4. Montrer que $IKJL$ est un parallélogramme et déterminer les coordonnées de son centre S .
5. Montrer que (AG) coupe le plan (IJK) en S .
6. Soit M un point de la droite (BF).
   a. Montrer que les coordonnées de M sont $(4,0,b)$ avec b un réel .
   b. Déterminer b pour que M appartient au plan (IJK).
   c. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la droite (BF) et du plan (IJK) . Placer ce point dans le repère $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.



Exercice N° 2

Le graphique ci-contre représente deux cubes $ABCDEFGH$ et $IADJLEHK$ qui sont isométriques de coté 1 .M un point du segment $[AE]$ et N un point du segment $[DH]$ tels que $AM = 2HN$. Q est un point du segment $[AB]$.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK}$.

2. On suppose que $HN = a$ et $AQ = b$ avec a et b deux réels de $]0, 1[$.

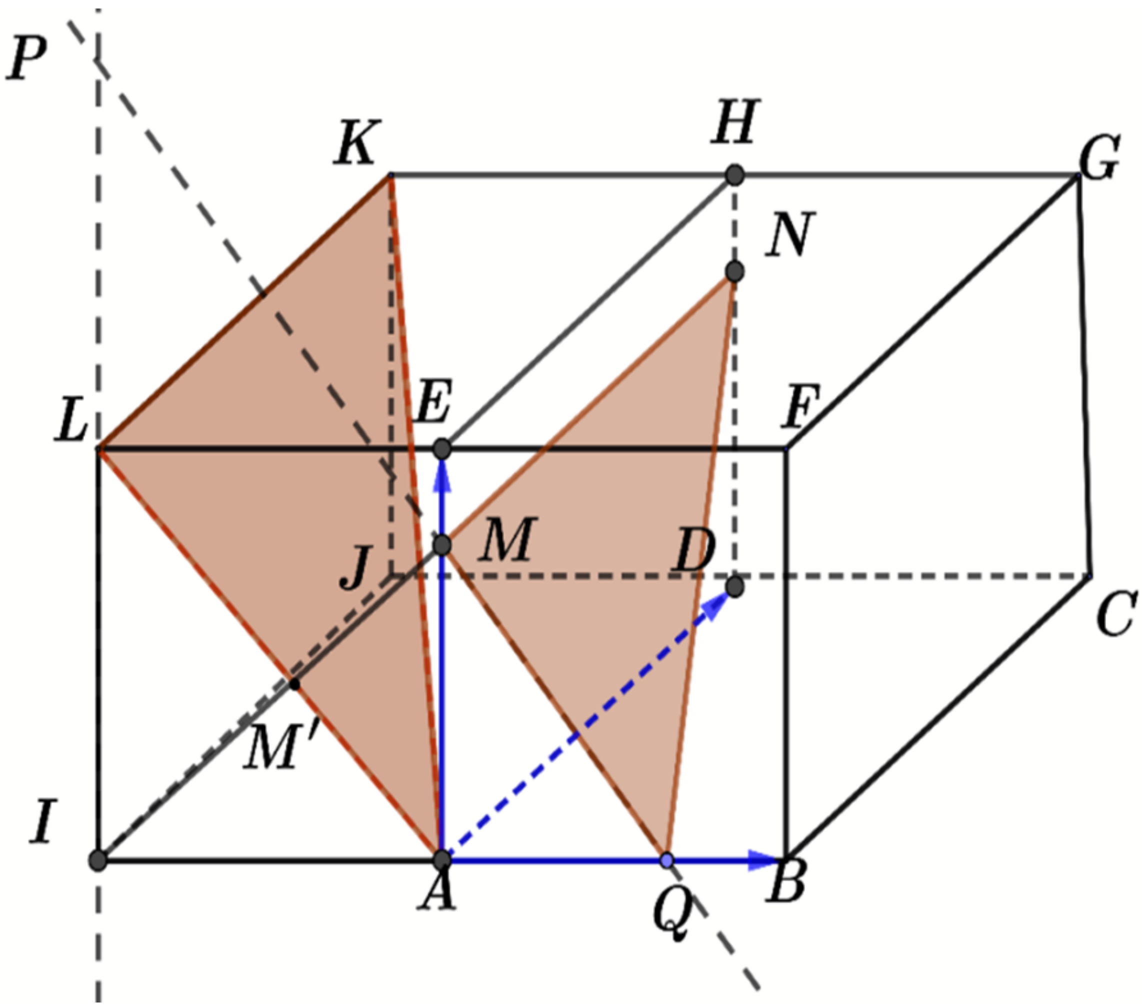
   a. Déterminer à l'aide de a et b , les composantes des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$.

   b. Déterminer les valeurs de a et b pour les quelles le plan (MNQ) est parallèle au plan (ALK) .

3. Dans la suite on suppose que les plans (MNQ) et (ALK) sont parallèles .

   a. La droite (QM) coupe la droite (IL) en P . Montrer que (AL) et (QP) sont parallèles .

   b. La droite (IM) coupe le plan (ALK) en M' . Montrer que A, M' et L sont alignés .



Exercice N° 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

On donne les points $A(3,2,2), B(0,2,1)$ et $C(0,1,1)$ et la droite : $(D) : \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 4 + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 2\alpha \end{cases}$

1. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b) Montrer que les droites (AB) et (D) : ne sont pas coplanaires .
2. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés .
   b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace . Calculer $Det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) perpendiculaire à (AB) et passant par A .
4. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) pssant par(C) et parallèle à (AB).
   b) En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur le plan (Q) .
   c) Calculer la distance CH.
5. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B . En déduire la nature du quadrilatère $ABCH$.

Exercice N° 4

I/ Soit dans l'espace (ξ) , un tétraèdre $ABCD$ tel que : $AB = AC = AD = 3$ et $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Soi I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$

1. Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont-ils coplanaires .
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.Déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonaux .

II/ L'espace (ξ) est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On donne les points $A(1,-1,1), B(2,1,3)C(3,-3,2)$ et $D(3,0,-1)$

1. Justifier que $I(\dfrac{3}{2}, 0, 2)$.
2. a) Montrer que les points B, C et D ne sont pas alignés .
   b) Montrer que le triangle BCD est équilatéral .
3. a) Montrer que $\overrightarrow{N} = 5\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ est un vecteur normal du plan BCD.
   b) Donner une équation cartésienne du plan BCD.
4. a) Montrer que $R' = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace (ξ).
   b) Déterminer les coordonnées du point I dans le repère R'

Exercice N° 5

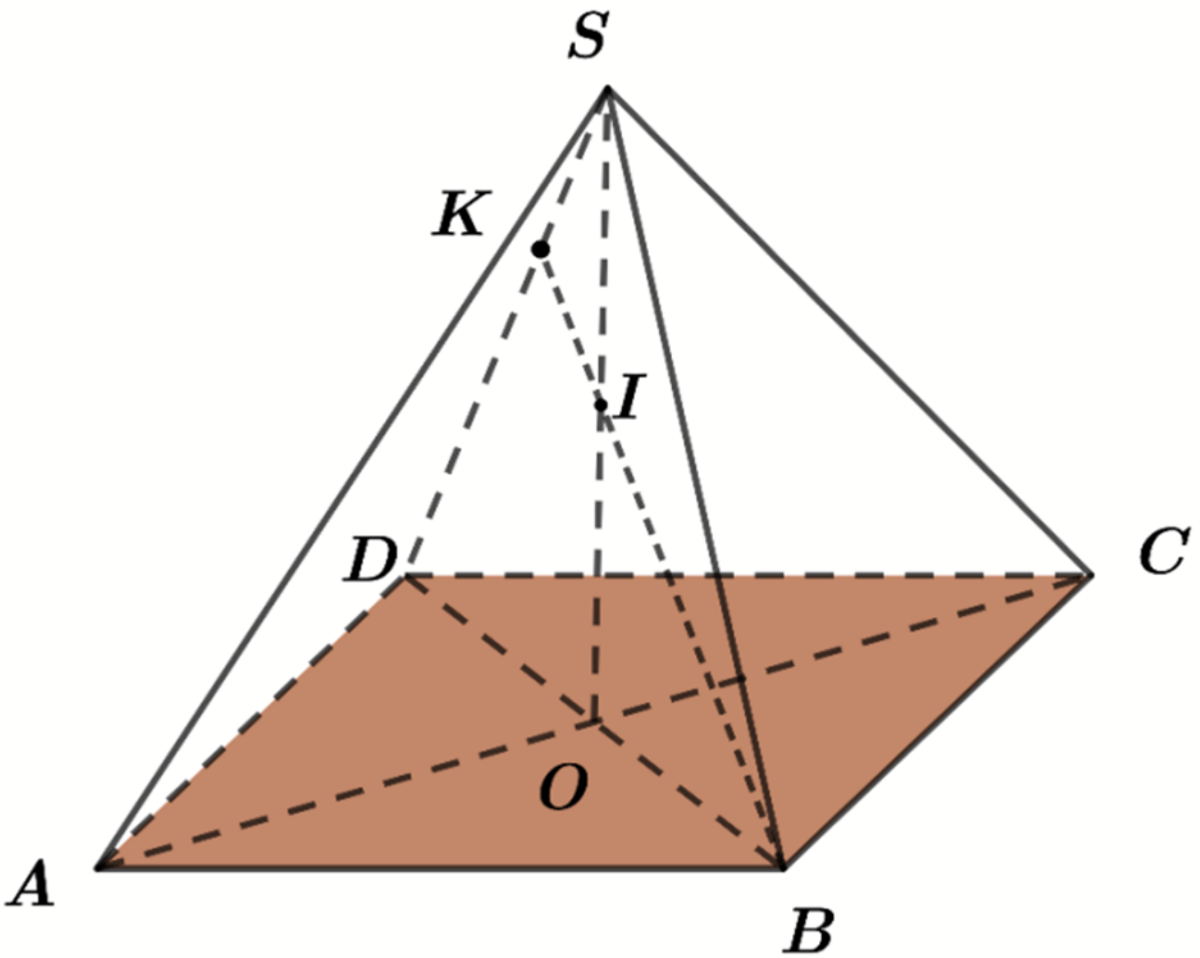
Dans la figure ci-contre $SABCD$ est un pyramide de sommet S et de base le carré $ABCD$ telle que : $SA = SB = SC = SD = AB$.
le point O est le centre de le base $ABCD$ avec $OB = 1$.

1. Montrer que le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$ est orthonormé .
   Dans la suite de l'exercice , on se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

2. On désigne par K le point tel que : $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et par I le milieu du segment $[SO]$.
   a. Déterminer les coordonnées du point K.
   b. Montrer que les points B, I et K sont alignés .

3. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BCI) est : $x + y + 2z - 1 = 0$.
   b. Déterminer une équation paramétrique de la droite (SA).
   c. Montrer que le plan (BCI) et le droite (SA) sont sécantes en un point L que l'on précisera .

4. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (SAD).
   b. Montrer que les plans (BCI) et (SAD) sont perpendiculaires .
   c. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection .



Exercice N° 6

L'espace (ξ) est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1,1,0)B(0,1,1)C(1,0,1)$ et $D(2,-1,4)$.

1.
   a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan (P) de l'espace .
   b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est $x+y+z-2=0$.

2. Soit la droite (Δ) passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   a. Déterminer une équation paramétrique de (Δ).
   b. Montrer que (Δ) et (P) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
   b. Montrer que les droites (Δ) et (BC) ne sont pas coplanaires .

3.
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) contenant (Δ) et parallèle à (BC).
   b. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécantes et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection .