Limite et comportement asymptotique

Rappel : .

I) Limite à l'infini d'un polynôme et d'une fraction rationnelle

limite d'un polynome(ou fontion polynome)en $+\infty$ ou en ∞

est celle de son terme de plus haut degré

exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathbf{5x^4}-3x^3+x^2-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathbf{5x^4})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathbf{5x^4}-3x^3+x^2-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathbf{5x^4})=+\infty$

limite d'une fracion rationnelle (ou fontion rationnelle)

en $+\infty$ ou en $-\infty$ est celle du quotient des termes

de plus haut degré du numérateur et du dénominateur

exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{4x^3}-2x^2+x+2}{\mathbf{5x^5}+x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{4x^3}}{\mathbf{5x^5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{5x^2}=0$

II) asymptote et branche infini

Dans toute la suite a et b sont deux réels et (φ_f) la courbe d'une fonction f

a) si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$

alors la courbe (φ_f) admet une asymptote verticale d'équation : $x=a$

b) si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$

alors la courbe (φ_f)admet une asymptote horizontale d'équation : $y=b$

c) si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$,

(attention) il y a 4 possibilités , continuer à chercher $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$:

cas n°1 : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x-ax)=b$

alors la courbe (φ_f) admet une asymptote oblique

d'équation : $y=ax+b$

Devoirat

[cas n°2](#) : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

alors la courbe (φ_f) **admet une branche parabolique de direction (ox)**

[cas n°3](#) : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

alors la courbe (φ_f) **admet une branche parabolique de direction (oy)**

[cas n°4](#) : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x - ax) = \pm\infty$

alors la courbe **admet une branche parabolique de direction**

la droite d'équation : $y = ax$.

exercice n°1 :

Déterminer la limite de chacune de chacune

des fonctions suivantes puis déduire si la courbe admet des asymptotes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}\right),,\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}}$$

exercice n°2 :

Soit la fonction définie sur $R \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}$$

1) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2) Montrer que (φ_f) admet la droite d'équation $y = 4 - x$,

comme asymptote oblique.

exercice n°3 :

Soit la fonction définie sur $R\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{2-x}$

1) déterminerles réels a et b et c tels que

pour tout $x \in D_f$ ona: $f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition ,

puis déduire les asymp… (φ_f)

Devoirat

3)Montrer que (φ_f) admet une asymptote oblique d'équation a préciser.

exercice n°4 :

Soit la fonction défine par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4x+5}+2 & si\ x \in]-\infty;-2] \\ \dfrac{x^2+x+1}{x+2} & si\ x \in]-2;+\infty] \end{cases}$$

On désigne par (φ_f) sa courbe dans un repère ortonormé$(o;\vec{i};\vec{j})$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) calculer $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

3)Montrer que la droite d'équation (D_1) $y=-x$

est une asymptote oblique a (φ_f) au voisinage de $-\infty$.

4) a) Vérifier que pour tout $x \in]-2;+\infty]$; $f(x) = x-1+\dfrac{3}{x+2}$

b)Montrer que la droite d'équation (D_2) $y = x-1$

est une asymptote oblique a (φ_f) au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position de (φ_f) par rapport(D_2) .

Devoirat

exercice n°5 :

Soit la fonction défine par $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) a)calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$,. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$,

b)Montrer que pour tout $x > 1$ **on a** $f(x) - x = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$

3) a) montre que f **est continue en 1.**

b) montrer que f **est continue sur** $\mathbb{R}$.

4) a) montre que f **est dérivable en 1.**

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (φ_f) **au point** $A(1,1)$

5) a) Montrer que pour tout $x > 1$ **ona** $[f(x)]^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 = \frac{3}{4}(x-1)^2$

b)En étudiant pour tout x de R le signe de $f(x) - \frac{1}{2}(x+1)$,

déterminer la position de (φ_f) **par rapport a (T) .**

Devoirat

Correction exercice N°1 :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}\right)$,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}^{2}-\sqrt{x-6}^{\,2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}}$$

$$=\frac{x+1-(x-6)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}}=0$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=+\infty$

Si on pose : $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}$ **puisque :**

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ **alors la droite d'équation:** $y=0$ **est une**

asymptote de $\left(C_f\right)$ ***au voisinage de*** $+\infty$**.**

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

Si on pose : $g(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}$ **puisque** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\sqrt{\frac{2}{5}}$

alors la droite d'équation: $y=\sqrt{\frac{2}{5}}$ **est une**

asymptote de $\left(C_g\right)$ **au voisinage de** $+\infty$**.**

Devoirat

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}}$$

On a : $$\frac{-6}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}}=\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}$$

$$=\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{(2x-3)-(2x+7)}$$

$$=\frac{-6\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{-10}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{5}$$

***Donc* :** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+7}\right)}{5}=+\infty$$

exercice n°2 :

Soit la fonction définie sur $R\backslash\{-1\}$ par : $f(x)=\ 4-x-\frac{2}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}4-x-\frac{2}{(x+1)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}4-x-\frac{2}{(x+1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}4-x-\frac{2}{(x+1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}4-x-\frac{2}{(x+1)^2}=-\infty$$

2) $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-(4-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2}{(x+1)^2}\right)=0$, donc la droite

d'équation: $y=4-x$ est asymptote oblique de (φ_f) au voisinage de $\pm\infty$

Devoirat

exercice n°3 : Soit la fonction défine sur $R\backslash\{2\}$par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{2-x}$

1) déterminerles réels a et b et c tels que

pour tout $x \in D_f$ ona: $f(x) = ax + b - \frac{c}{2-x}$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition ,

puis déduire les asymptotes de (φ_f)

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x} = \frac{x^2 - 4x + 4 + x + 2}{2 - x} = \frac{(2 - x)^2 - (-x + 2) + 4}{2 - x}$$

$$f(x) = 2 - x - 1 + \frac{4}{2 - x} = -x + 1 + \frac{4}{2 - x}$$

$$\text{Donc : } f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2 - x}$$

Autre méthode : On a :

d'une part : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{2-x}$, d'autre part : $f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$

donc d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{2x - x^2} = -1$

d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{c}{2x - x^2} = a$

Donc : $a = -1$, donc $f(x) = -x + b + \frac{c}{2-x}$

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x} + x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x + 6}{2 - x} = 1$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to+\infty} b + \frac{c}{2 - x} = b$

Donc : $b = 1$

Devoirat

Donc : $f(x) = -x + 1 + \dfrac{c}{2-x}$

Reste le réel : c

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)(2-x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 - 3x + 6 = 4$

d'autre part: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)(2-x) = \lim\limits_{x\to 2}(-x+1)(2-x) + c = c$

Donc : $c = 4$

Conclusion :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition , puis déduire les asymptotes de (φ_f)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-x + 1 + \frac{4}{2-x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x + 1 + \frac{4}{2-x}\right) = -\infty$$

Donc : la droite d'équation : $x = 2$ est asymptote verticale de (C_f)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (-x+1)\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2-x} = 0$$

Donc la droite d'équation : $y = -x + 1$ est une asymptote de (C_f) au $V(\pm\infty)$

Devoirat

exercice n°4 :

Soit la fonction défine par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4x+5}+2 & si\ x\in\,]-\infty;-2] \\ \dfrac{x^2+x+1}{x+2} & si\ x\in\,]-2;+\infty[\end{cases}$$

On désigne par (φ_f) sa courbe dans un repère ortonormé$(o;\vec{i};\vec{j})$

1) déterminer le domaine de définition de f

On a : $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$

Donc pour tout : $x\in\mathbb{R};\ x^2+4x+5\geq 0$

Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) calculer $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x^2+x+1}{x+2}=+\infty$$

Donc : la droite d'équation : $x=-2$ est asymptote verticale de (C_f).

3)Montrer que la droite d'équation $(D_1)\ \ y=-x$

est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right)}{\sqrt{x^2-4x+5}-(x+4)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2-4x+5}-(x+4)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}+(x+4)}=0$$

Donc : la droite d'équation $(D_1)\ \ y=-x$

est une asymptote oblique a (φ_f) au voisinage de $-\infty$.

Devoirat

4) a) **Vérifier que pour tout** $x \in]-2;+\infty]$; $f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+2}$

b)Montrer que la droite d'équation $(D_2): y = x - 1$

est une asymptote oblique a (φ_f) **au voisinage de** $+\infty$.

c) **Déterminer la position de** (φ_f) **par rapport** (D_2) .

a)

$$\text{pour tout } x \in]-2;+\infty];\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+2}$$

$$\text{pour tout } x \in]-2;+\infty]; \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+2)(x-1)+3}{x+2}$$

$$\text{pour tout } x \in]-2;+\infty]; \Leftrightarrow f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+2}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (x-1)\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+2} = 0$$

Donc : la droite d'équation $(D_2): y = x - 1$

est une asymptote oblique a (φ_f) **au voisinage de** $+\infty$

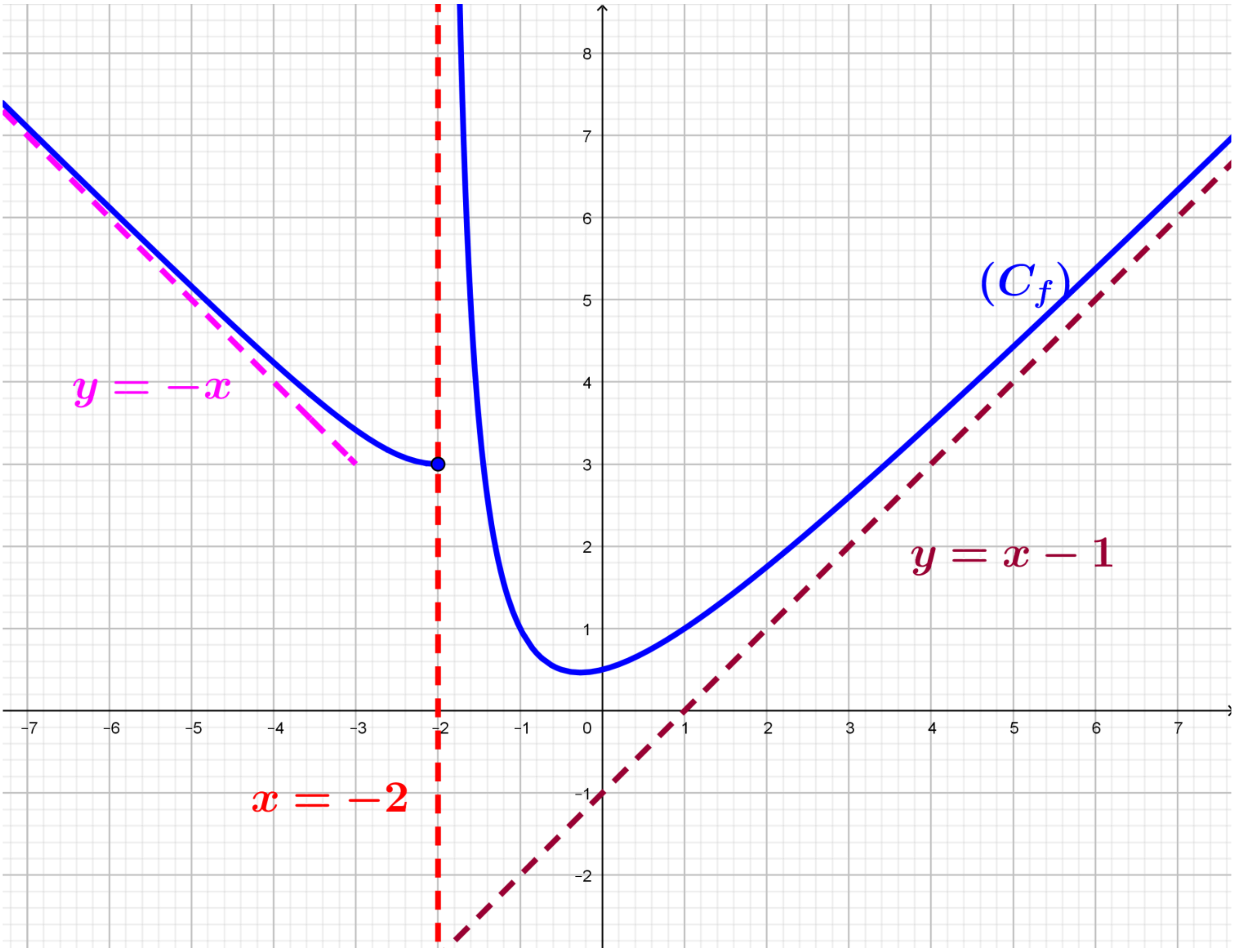
c) pour déterminer la position de (φ_f) **par rapport** (D_2) **;**

il suffit d'étudier le signe de : $f(x) - (x-1)$ **pour** $x \in]-2;+\infty]$;

On a : pour tout $x \in]-2;+\infty]$; $f(x) - (x-1) = \frac{3}{x+2} > 0$

Donc : la courbe (φ_f) **est au dessus de** (D_2).

Devoirat



exercice n°5 :

$$\textit{Soit la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f :

⊛ La fonction $x \to x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$

donc f est définie pour tout : $x \leq 1$

⊛ La fonction $x \to \sqrt{x^2 - x + 1}$ est définie si $x^2 - x + 1 \geq 0$

Or : $x^2 - x + 1 = \left(\mathrm{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ por tout $x \in \mathbb{R}$

donc f est définie pour tout : $x > 1$

Conclusion : f est définie pour tout : $x \in \mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) a) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

b) Montrer que pour tout $x > 1$ on a $f(x) - x = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$

pour tout $x > 1$ on a :

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} == \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \frac{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \frac{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{-1}{2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$

Donc : la droite d'équation $(D_2): y = x - \dfrac{1}{2}$

est une asymptote oblique a (φ_f) **au voisinage de** $+\infty$

3) a) montre que f est continue en 1.

On a : $f(1) = 1^2 - \frac{3}{2} \times 1 + \frac{3}{2} = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 1$$

Donc : $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ donc f est continue en 1 .

b) montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

⍟ **La fonction $x \to x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle continue sur $]-\infty, 1[$; donc f continue sur $]-\infty, 1[$**

⍟ **La fonction $x \to \sqrt{x^2 - x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle continue sur $]1, +\infty[$; donc f continue sur $]1, +\infty[$**

⍟ **f est continue en 1**

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) montre que f est dérivable en 1 :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}$$

$= \frac{1}{2}$ **donc f est dérivable à droit** [illegible] $) = \frac{1}{2}$

Devoirat

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Douma Ali
الأستاذ
علي دومة
Mathématiques

donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=\frac{1}{2}$

puisque : $f'_d(1)=f'_g(1)=\frac{1}{2}$ alors f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (φ_f) *au point* $A(1,1)$

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow (T): y=\frac{1}{2}(x-1)+1$$

$$\Leftrightarrow (T): y=\frac{1}{2}(x+1)$$

5) a) Montrer que pour tout $x>1$ ona $[f(x)]^2-\frac{1}{4}(x+1)^2=\frac{3}{4}(x-1)^2$

b)En étudiant pour tout x *de* $\mathbb{R}$ le signe de $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)$,

déterminer la position de (φ_f) par rapport à (T) .

pour tout $x>1$ ona :

$$[f(x)]^2-\frac{1}{4}(x+1)^2=\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-\frac{1}{4}(x+1)^2$$

$$=x^2-x+1-\frac{1}{4}(x^2+2x+1)$$

$$=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{4}(x^2-2x+1)=\frac{3}{4}(x-1)^2$$

Donc pour tout $x>1$; $[f(x)]^2-\frac{1}{4}(x+1)^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}(x+1)$$

$\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\geq 0$ donc (φ_f) est au dessus de (T)

Devoirat

Douma Ali
الأستاذ علي دومة
Mathématiques