Lycée secondaire IBN ARAFA SOUG JDID Année scolaire : 2022/2023	Devoir de synthèse N°3	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences expérimentales
	Durée : 3h	Proposé par : Guedri Hédi

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice n°1 :(3 points) (0,5+0,5+0,75+0,75+0,25+0,25)

Une urne contient quatre boules numérotées (6) et cinq boules numérotées (–3), indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant deux nombres différents ?

2) Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre ?

3) On note S la somme des nombres des deux boules tirées.

a) Quelles sont les différentes valeurs possibles de S ?

b) Déterminer la probabilité de chaque valeur possible de S.

c) Quelle est la probabilité que S soit positive ?

d) Quelle est la probabilité que S soit paire ?

Exercice n°2 :(5 points) (1,5+0,75+0,5+1+0,5+0,5+0,25)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que, pour tout n$\in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n < 3$.

b) Vérifier que, pour tout n$\in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(3-U_n)}{1+U_n}$.

c) En déduire le sens de variation la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{3-U_n}{U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Determiner $\lim_{n\to+\infty} V_n$.

c) Vérifier que, pour tout n$\in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{3}{1+V_n}$.

d) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°3 :(5 points) (0,5+0,75+0,25+0,25+0,75+0,5+0,25+0,25+0,5+1

Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = x.\sin x + \cos x - 1$.

A) 1) Calculer $g'(x)$.

2) Recopier puis compléter le tableau de variation de g suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
Signe de x		$-$	0	$+$	
Variation de g					

3) Déduire le signe de g.

B) On considère la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

2) Montrer que O est un centre de symétrie de (C).

3) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point O.

4) a) Vérifier que, pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5) Tracer (C) et T sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. On prendra 1unité= 4cm.

Exercice n°4 :(7 points) (1,75+0,75+0,25+1+0,5+1+0,25+0,25+0,5+0,5+0,25)

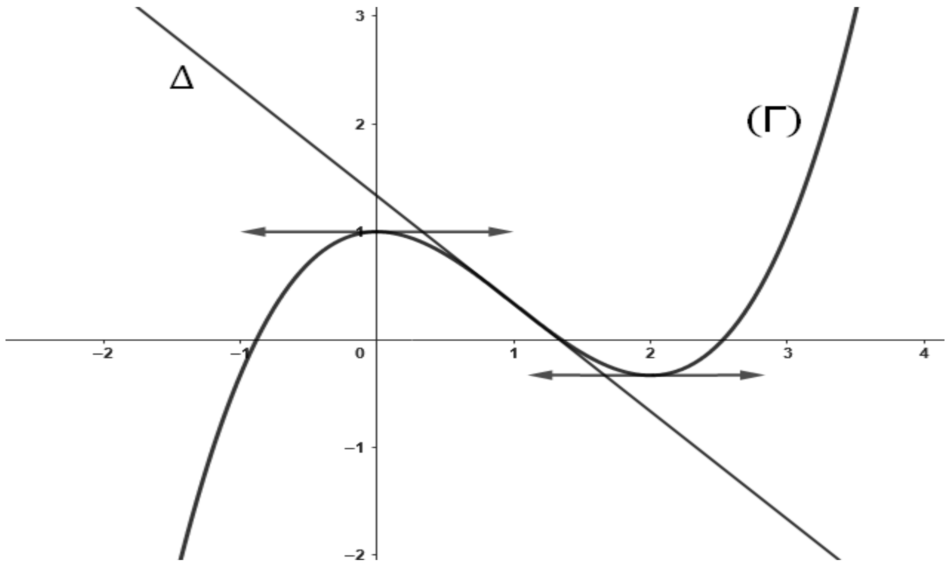
A/On note (Γ) la courbe d'une fonction f définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et

soit $\Delta : y = -x + \frac{4}{3}$.

- (Γ) admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.
- (Γ) admet deux tangentes horizontales aux points $A(0\,;1)$ et $B(2\,;-\frac{1}{3})$.
- (Δ) est la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1.

1) Déterminer $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(1)$, $\left|\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\right|$ et $\left|\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right|$.

2) Dans la figure ci-dessous on a tracé dans un repère orthogonal, (Γ) ainsi que Δ et les tangentes horizontales.



En utilisant le graphique : Dresser le tableau de variation de f

3) L'expression de f est donnée par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + b$, où a et b sont des réels.

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et a.

b) En utilisant la question 1), déduire que $a = -1$ et $b = 1$

B/ Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Préciser les branches infinies de la courbe (C).

2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Vérifier que $-2 < \alpha < -1$.

c) Montrer que $\alpha^2 = \frac{5}{3-\alpha}$ et $\alpha^3 = \frac{15}{3-\alpha} - 5$.

d) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{2}{3}$.

e) On note le point A intersection de (Γ) et la droite D d'équation $y = -\frac{2}{3}$.

Déterminer l'abscisse de A.