| L.S.Elksour | Devoir de contrôle n°3<br>Mathématiques<br>Durée :2h | Prof :Bouzouraa.Anis |
|---|---|---|
| A.S :2022-2023 | | |
| $4^{ème}$ $T_1$ | | |

**Exercice 1 (6points)**

*L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,on donne les points*

$A(-1;-1;-1), B(-2;-1;0), C(1;1;-5) et\ \vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

*1)a)Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.*

*b)Soit P le plan passant par les points A , B et C .Montrer que P a pour équation :*

$x+y+z+3=0.$

*c)On considère les points $E(1,0,,2)$ et $H\ (-1,-2\ ,0)$.Montrer que H est le projeté orthogonal de E sur le plan P.*

*d)Calculer le volume du tétraèdre EABC.*

*2)On considère dans l'espace , l'ensemble S des points M ( x , y , z) tel que :*

$x^2+y^2+z^2-2x-4z-9=0.$

*a)Montrer que S est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$.*

*b)Montrer que S et P se coupent suivant un cercle ( $C_1$) dont on précisera le centre et le rayon.*

*c)Vérifier que A et B appartiennent à ( $C_1$).*

**Exercice 2 (4points)**

*Dans un atelier de réparation d'une agence de location de voitures, on dispose d'un lot contenant un grand nombre de bougies pour moteur à essence.*

*Le lot est constitué de 50% de bougies d'origines dont 2% sont défectueuses, le reste du lot est constitué de bougies adaptables dont 20% sont défectueuses. On prélève au hasard une bougie du lot et on considère les deux événements suivants :*

*D : « La bougie prélevée est défectueuse »*

*O « La bougie prélevée est d'origine »*

*1)a)Quelle est la probabilité pour que la bougie prélevée soit défectueuse et d'origine ?.*

*b) Quelle est la probabilité pour que la bougie prélevée soit défectueuse et adaptable ?.*

c)Montrer que la probabilité p pour que la bougie prélevée soit non défectueuse est égale à 0,89.

2)Pour changer les bougies d'une voiture , le mécanicien prélève au hasard quatre bougies du lot .Comme le nombre de bougies est grand ,on assimile ce prélèvement à un tirage successif avec remise de quatre bougies .Quelle est la probabilité pour que les quatre bougies soient non défectueuses ?

***<u>Exercice 3 (3points)</u>***

Soit g et h les fonctions définies sur $[1,+\infty[$ $par$:

$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

1)Soit les fonctions G et H définies sur $[1,+\infty[$ $par$:

$$G(x) = \sqrt{x^2-2x+2} \; et \; H(x) = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$$

Montrer que G et H sont des primitives respectives de g et h sur $[1,+\infty[$.

2)Soit $I = \int_1^2 h(x)dx. Montrer\ que\ I = \ln(1+\sqrt{2})$

3)Soit $J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$ et $K = \int_1^2 G(x)dx.$

a)Montrer que $I + J = K$.

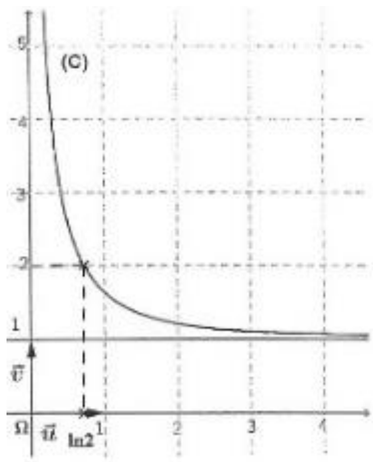
b)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \sqrt{2} - K$ .

c)En déduire la valeur de l'intégrale J.

***<u>Exercice 4 (7points)</u>***

1)Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$.On donne ci-contre la courbe représentative ( C ) de la fonction g dans un repère orthonormé ( $\Omega, \vec{U}, \vec{V}$).En utilisant le graphique :




a)Déterminer g( ln(2)) , $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b)Justifier que pour tout x de $]0;+\infty[$ g ' (x)$<$ 0 et g(x)$>$ 1.

2)Soit f la fonction définie sur ]0 ;+∞[ par $f(x) = \ln(e^x - 1)$ et soit $(\Gamma)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

a)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b)Vérifier que $f'(x) = g(x) \ \ \forall\, x \in ]0,+\infty[$.

c)Dresser le tableau de variation de f.

*d)Vérifier que f(ln(2))=0.En déduire le signe de f(x) suivant les valeurs de x.*

*3)a)Montrer que ln(g(x))=* $x - f(x)\ \forall\ x \in\ ]0;+\infty[$ *.*

*b)En déduire que* $\Delta: y = x$ *est une asymptote à la courbe* $(\Gamma)$ *au voisinage de (+∞).*

*c)Montrer que* $(\Gamma)$ *est au dessous de* $\Delta$

*4)Soit h la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par h(x)= f(x) – g(x).*

*a)Vérifier que* $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$*.*

*b)Montrer que l'équation f(x)=g(x) admet sur* $]0;+\infty[$ *une seule solution* $\alpha$*.*

*Et que* $1{,}5 < \alpha < 1{,}7$*.*

*5)Tracer* $(\Gamma)$*.*

*6)a)Vérifier que* $\frac{e^{2x}}{e^x-1} = e^x + \frac{e^x}{e^x-1}$ *.En déduire que*

$\int_{\ln(2)}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx = e^{\alpha} + f(\alpha) - 2$

*b)Soit* $I = \int_{\ln(2)}^{\alpha} e^x \ln(e^x-1)\, dx$*. .Montrer à l'aide d'une intégration par parties que* $I =$ $e^{\alpha} f(\alpha) - \int_{\ln(2)}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$*.*

*c)En déduire que* $I = 2$*.*