Devoir de synthèse n°2 en mathématiques

Prof . Mme Saloua

Exercice 1 (6 points)

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques.
On estime que 5% des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces.
Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On considère les évènements suivants :

- D: « la pièce est défectueuse »;
- T: « la pièce présente un test positif »;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à 0,98
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
 b. Démontrer que : p(T) = 0,0775.
 c. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse ou présente un test positif.

3. On appelle valeur prédictive positive du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif.
On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.
On donnera un résultat arrondi au millième.

PARTIE II

1. On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

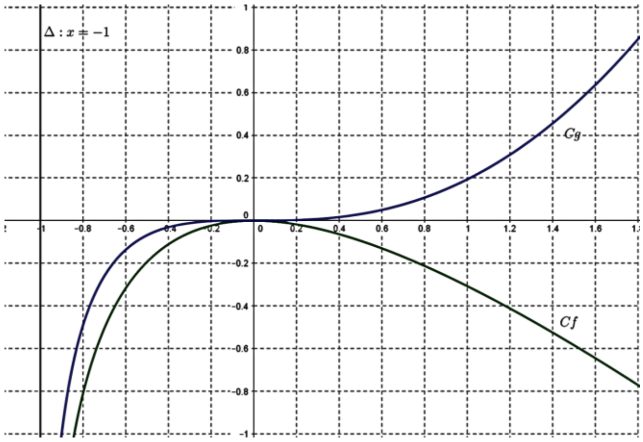
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
a. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
On donnera un résultat arrondi au centième.
c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

2. On choisit un échantillon de n pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

Quel est le nombre pièces minimal faut-il choisir pour que la probabilité que cet échantillon contienne au moins une
pièce défectueuse supérieure à 0,95.

Exercice 2 (6 points)

Dans l'annexe ci- contre Cf est la courbe représentative d'une fonction f définie sur]-1, +∞[par $f(x) = \ln(1+x) - x$ et Cg est celle de la fonctions $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$



1) Par une lecture graphique justifier que :
Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$,

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

2) On considère la suite U_n définie par $pour\ tout\ entier\ naturel\ n \geq 1$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases},$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $U_n > 0$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$\ln(U_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

a)Calculer S_n et T_n en fonction de n .En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

b)Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

c)En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(U_n) \leq S_n$

d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, U_n est majorée par e

4)a)Montrer que la suite U_n est croissante

b) En déduire que U_n est convergente . Soit ℓ sa limite

Monter alors que $\sqrt[6]{e^5} \leq \ell \leq e$

Problème (8points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} 2(x-1)\ln(1-x) & si \quad x<1 \\ (x-2)e^{-x+1} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

On note(C) la courbe représentative de f dans d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité est 2 cm)

Partie A

1) Calculer les limites de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) Etudier la continuité de f en 1

3) a)Montrer que pour tout $x > 1$, $\frac{f(x)+1}{x-1} = e^{-x+1} - \frac{e^{-x+1}-1}{x-1}$

b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 et déterminer $f'_d(1)$.

c) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f à droite en 1

4) a)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation (E): f (x) = -2 admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[-1 ; \frac{-1}{2}\right]$

c) On donne en annexe la courbe de la restriction de f à] -∞ , 1[.

Compléter la courbe de f et tracer T

Partie B

1) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x < 1, $\frac{x^2-2x}{x-1} = ax+b+\frac{c}{x-1}$

2) Par une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^{1-\frac{1}{e}} (x-1)\ln(1-x)\,dx$.

3) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe(C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x= 0 et $x = 1-\frac{1}{e}$

Partie C

1) a) Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation h(x) = x

où h est la fonction définie sur $\left[-1 ; \frac{-1}{2}\right]$ par $h(x) = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}$

b) Montrer que pour x$\in \left[-1 ; \frac{-1}{2}\right]$, h(x) $\in \left[-1 ; \frac{-1}{2}\right]$

a) Montrer que pour tout x$\in \left[-1 ; \frac{-1}{2}\right]$,$|h'(x)| \leq \frac{7}{8}$

2) Soit la suite u_n définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.-

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n . $u_n \in \left[-1 ; \frac{-1}{2}\right]$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8} |u_n - \alpha|$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

d) En déduire que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.