Lycée Cité El-Amel
Mokhtar Ouardani
$4^{ème}$ Maths

Devoir de contrôle n°2
(Mathématiques)

Année scolaire : 2022/2023
Date : Février
Durée : 2 heures

« Le sang froid fait gagner des points »

Exercice n° 1 (4 points)

Sur la feuille annexe (figure 1) on a construit la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ et la courbe $\mathscr{C}'$ de sa fonction dérivée dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Tracer la demi-tangente à $\mathscr{C}$ au point O.

b- Ecrire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 et au point d'abscisse e.

2) a- Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[e^{-1},e]$ réalise une bijection de $[e^{-1},e]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et à gauche en e. Déterminer $(g^{-1})'(0)$ et $(g^{-1})'_g(e)$.

c- Tracer la courbe de la fonction g^{-1} dans le même repère.

Exercice n° 2 (8 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. sur la feuille annexe (figure 2), on a construit un rectangle ABCD de centre O tel que: $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $AB = 2AD$.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[ID]$ et $[CD]$.

Le point E est le symétrie du point I par rapport à A.

1) Soit S la similitude directe de centre D telle que : $S(I) = A$.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Montrer que $S(C) = I$.

2) Soit f la similitude directe telle que : $f(D) = I$ et $f(A) = C$.

a- Déterminer le rapport et l'angle de f.

b- Tracer les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centres respectifs A et C et passant par I.

c- Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω appartient à $\mathscr{C}$.

d- Justifier que le cercle $\mathscr{C}'$ est l'image du cercle $\mathscr{C}$ par f puis construire le point Ω.

3) La perpendiculaire à la droite (ΩD) passant par Ω recoupe $\mathscr{C}'$ en F.

a- Caractériser $f0f$ et montrer que $f(I) = F$.

b- Montrer que le quadrilatère ICFD est un carré.

4) Soit $R = S0f$.

a- Caractériser R .

b- Construire Ω' le projeté orthogonal de D sur (ΩE) puis montrer que $R(\Omega) = \Omega'$.

c- Montrer que $J\Omega\Omega'$ est un triangle rectangle et isocèle en J.

Exercice n° 3 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

I / 1) a- Dresser le tableau de variation f.

b- Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c- Tracer les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit F la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par : $F(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

a- Montrer que F est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et déterminer $F'(x)$.

b- Montrer que pour tout réel x de $[0,\frac{\pi}{2}[$, $F(x) = x$ puis calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

c- Calculer l'aire A de la partie du limitée par la courbe C_f, la droite des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

3) a- Montrer que pour tout réel x de J, $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

b- Soit $I=\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$. Justifier que $I=\dfrac{\pi}{2}-1$.

II / Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ et $U_n=\int_0^1 x^n.\sqrt{1-x^2}\,dx$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) a- Calculer U_1.

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+4}U_n$.

c- Déduire la valeur de U_3.

2) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k U_K$

a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=(-1)^n\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

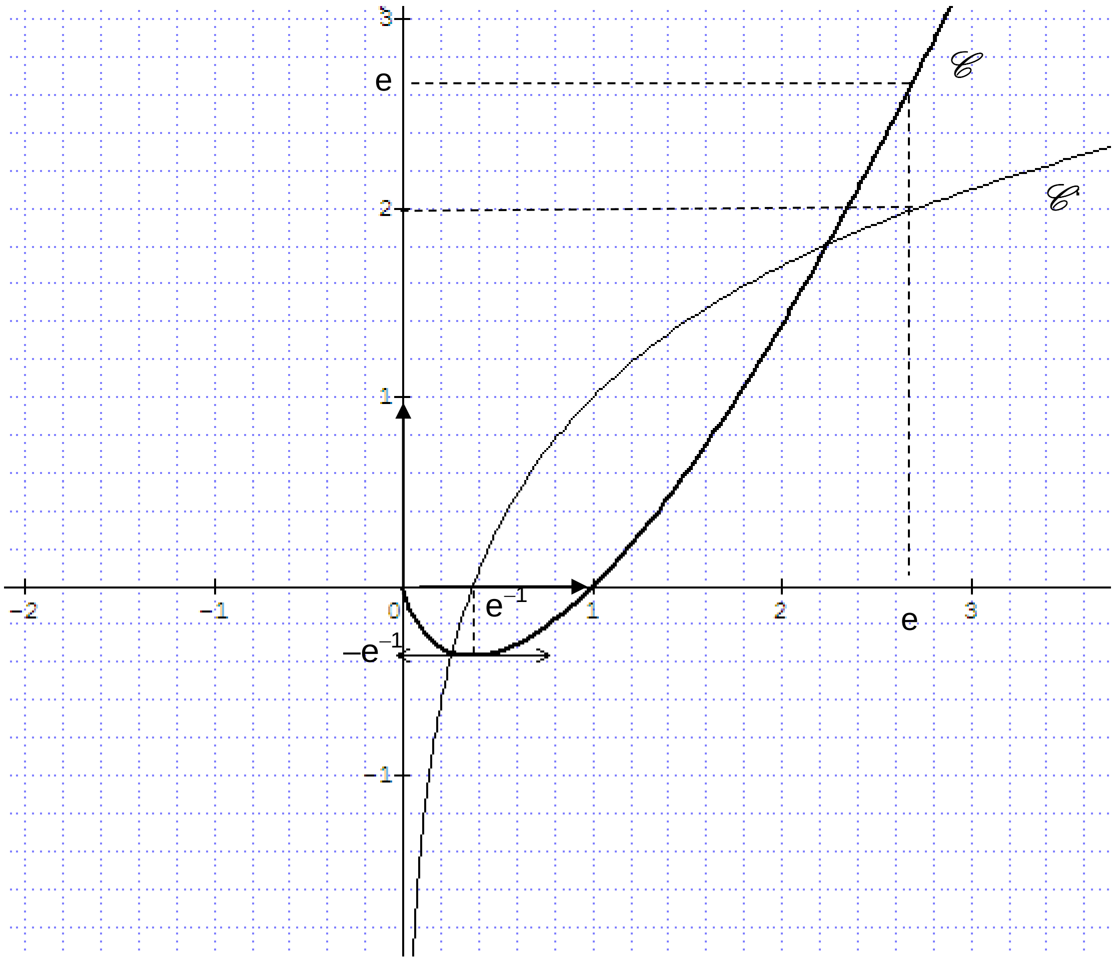
b- Sachant que $U_0=\dfrac{\pi}{4}$, montrer que $\int_0^1\dfrac{x}{1+x}\sqrt{1-x^2}\,dx=1-\dfrac{\pi}{4}$.

c- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\le\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\sqrt{1-x^2}\,dx\le\dfrac{1}{n+2}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Nom et prénom : . . . . Classe : 4ème Maths

Annexe à rendre avec la copie

(Figure 1)



(Figure 2)