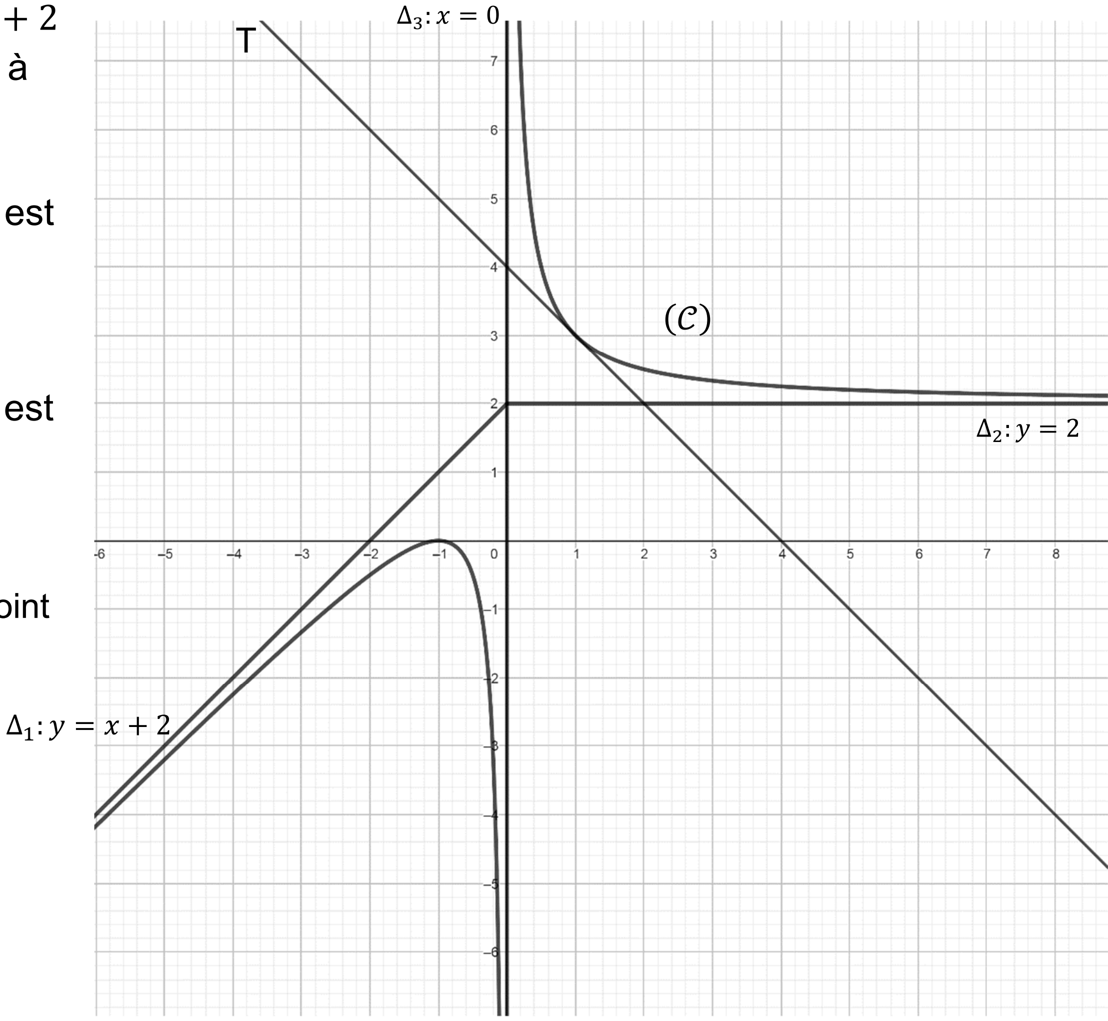
Lycée privé « les lumières » Date : 8/02/2023	Devoir de contrôle N°2 Mathématiques	Classe : 3 Sc Durée : 2H

EXERCICE N°1 : (4 points)

Le graphique de la figure (1) est la représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

- La droite $\Delta_1 : y = x + 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $(-\infty)$.
- La droite $\Delta_2 : y = 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $(+\infty)$.
- La droite $\Delta_3 : x = 0$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
- La droite T est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.



A l'aide du graphique et les renseignements fournis, déterminer :

1)
   a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-1}{f(x)-2}$
   c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - x]$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{f(x)-2x}$

2)
   a) $f'(-1)$ et $f'(1)$.
   b) Le tableau de variation de f.

EXERCICE N°2 : (5 points)

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan.

On considère les points $A(1, \sqrt{3}), B(\sqrt{3}, -1)$ et le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

1)
   a) Déterminer les coordonnées polaires des points A et B.
   b) Placer les points A, B et C.

2)
   a) Montrer que OACB est un carré.
   b) Vérifier que les coordonnées polaires du point C sont $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right)$
   c) Vérifier que les coordonnées cartésiennes du point C sont $\left(1+\sqrt{3}, \sqrt{3}-1\right)$.
   d) En déduire que $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $et\ sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE N°3 : (6 points)

Une boite contient 10 jetons indiscernables au toucher répartis comme suit :

- 5 jetons rouges numérotés : 0, 0, 1, 2 et 2.
- 3 jetons blancs numérotés : 0, 1 et 2.
- 2 jetons verts numérotés : 1 et 2.

Une épreuve consiste à retirer au hasard, **successivement et avec remise** **3** jetons de la boite.

1) Déterminer le nombre N de tirages possibles.
2) Déterminer le cardinal de chacun des ensembles suivants :
   A : « choisir 3 jetons de même couleur »
   B : « choisir 3 jetons de même numéro »
   C : « choisir un seul jeton vert »
   D : « choisir au plus un jeton rouge »
   E : « choisir 3 jetons dont la somme des numéros est égale à 2 »
   F : « choisir 3 jetons dont le produit est nul »

EXERCICE N°4 : (5 points)

Pour tout réel x, on pose $h(x) = \sin(x) + \sin(3x)$

1)
   a) Montrer que, pour tous réels a et b on a :$sin(a-b) + sin(a+b) = 2\,sin(a)\,cos(b)$
   b) En déduire que pour tout réel x, $h(x) = 2\ \sin(2\,x)\ cos(x)$
      (on posera $a - b = x\ et\ a + b = 3\,x$)

2)
   a) Montrer que, pour tout réel $x, \sin(x)\,h(x) = sin^2(2\,x)$.
   b) En déduire que $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{1}{4}$ et que $2\,sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{2}\,sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2} = 0$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2\,x^2 + \sqrt{2}\ x - \frac{1}{2} = 0$ et en déduire la valeur exacte de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$