Resumé : les oscillateurs électriques libres non amortis - Prof Abidi Ramzi

I°) outils mathematiques :

1°) $\frac{d}{dt}\left[a.\sin(w_0t+\varphi)\right]=a.w_0.\cos(w_0t+\varphi)$

2°) $\frac{d}{dt}\left[a.\cos(w_0t+\varphi)\right]=-a.w_0.\sin(w_0t+\varphi)$

3°) $\cos(\varphi)=\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})$

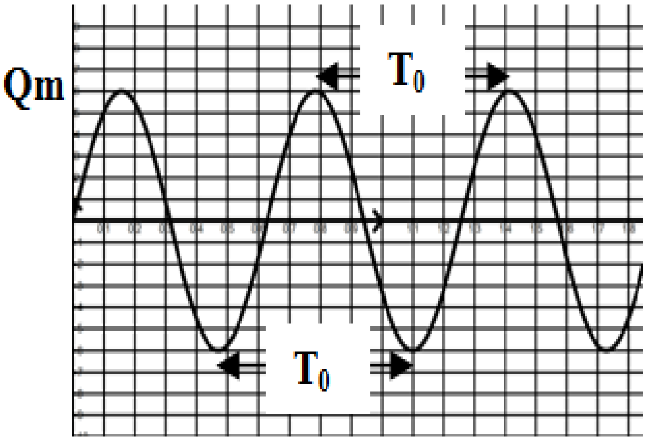
4°) $-\sin(\varphi)=\sin(\varphi+\pi)$

5°) $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

II°) oscillateurs électriques libres non amortis

- le circuit LC est un circuit électrique imaginaire impossible à réaliser .
- les grandeurs physiques q , i , u_C et u_L sont des fonctions sinusoïdales

exemple : $q(t) = Qm.\sin(w_0t + \varphi_q)$



Qm : valeur maximale ou amplitude.

T_0 : periode propre. $T_0=\frac{2\pi}{w_0}=2\pi\sqrt{LC}$

w_0 : pulation propre $w_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

N_0 : frequence propre. $N_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

φ_q : phase initiale (à déterminer à partir des conditions initiales)

Equation différentielle en q(t) :

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}.q=0$$

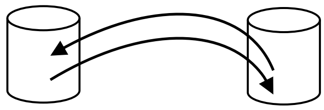
solution : $q(t) = Qm.\sin(w_0t + \varphi_q)$

à partir de cette solution on peut exprimer les autre grandeurs phyqiques i(t) , $u_C(t)$, $u_L(t)$

- $i(t)=\frac{dq}{dt}=w_0Qm.\cos(w_0t+\varphi_q)$

$=w_0Qm.\sin(w_0t+\varphi_q+\frac{\pi}{2})$

d'où : $Im = w_0Qm$ et $\varphi_i=\varphi_q+\frac{\pi}{2}$



Conservation de l'énergie totale d'un circuit LC série

L'énergie totale $E = E_c + E_L$ avec
E_c : énergie électrique emmagasinée dans le condensateur.
E_L : énergie magnétique emmagasinée dans la bobine. $E=\frac{1}{2}Cu_C^2+\frac{1}{2}Li^2$

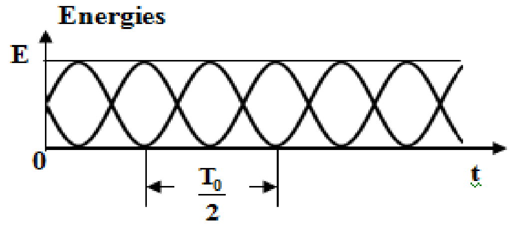
$$\frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow E \text{ est une constante}$$

$$E=\frac{Q_m^2}{2C}=\frac{1}{2}CU_{Cm}^2=\frac{1}{2}LI_m^2$$

Expressions des énergies en fonction du temps :

$$E_e=\frac{Q_m^2}{2C}.\sin^2(w_0t+\varphi_q)=E.\sin^2(w_0t+\varphi_q)$$

$$E_L=\frac{1}{2}L.I_m^2.\cos^2(w_0t+\varphi_q)=E.\cos^2(w_0t+\varphi_q)$$



attention :
les énergies en fonction du temps sont periodiques de periode $T=\frac{T_0}{2}$

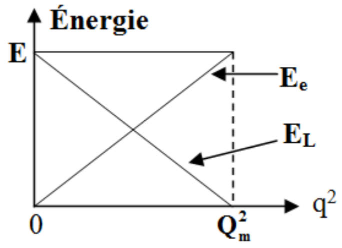
Expressions des énergies en fonction de q^2 :

$$0 \le q^2 \le Q_m^2$$

on pose $q^2 = X$

$$E_L = \frac{1}{2}L.i^2 = E - Ee = \frac{1}{2C}\left(Q_m^2 - X\right)$$

forme linéaire



Expressions des énergies en fonction de q :

$$-Qm \le q \le Qm$$

$$Ee = \frac{q^2}{2C} \qquad E_L = \frac{1}{2}L.i^2 = E - Ee = \frac{1}{2C}\left(Q_m^2 - q^2\right)$$

forme parabolique