Devoir de synthèse n°3

LYCEE SBEITLA

✧✧✧✧✧✧

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SECTION : 4ème ∞ SCIENCES EXPERIMENTALES ∞

✧✧✧✧✧✧

PROF : DHOUADI NEJIB & BELLILI MONGI

EXERCICE N°1 | **06 pts**

I°) *Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=x.e^{x}-2$

1°) *Dresser le tableau des variations de g*

2°) a. *Montrer que l'équation:* $g(x)=0$ *admet une unique solution* a *puis que :* $0,8\leq a\leq 0,9$

b. *Donner le signe de* $g(x)$ *suivant les valeurs de x.*

II°) *On considère la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{e^{x}-2x}{e^{x}+2}$ *et on désigne par* ζ_f *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a. *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

b. *Montrer que la droite* Δ *d'équation* $y=-x$ *est une asymptote à* ζ_f *au voisinage de* $-\infty$

c. *Etudier la position relative de* ζ_f *et la droite* Δ

2°) a. *Montrer que pour tout réel* x *on a :* $f'(x)=\dfrac{2.g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$

b. *Dresser le tableau de variation de f*

c. *Montrer que :* $f(a)=1-a$

3°) *Tracer la courbe* ζ_f *et* Δ *(on prendra:* $a\approx 0,85$ *)*

4°) *Soit A l'aire de la partie du plan limitée par* ζ_f *, la droite* Δ *et les droites d'équations :* $x=-1$ *et* $x=0$

a. *Montrer que pour tout* $x\in[-1,0]$ *on a :* $\dfrac{1}{3}(x+1)e^{x}\leq\dfrac{(x+1)e^{x}}{e^{x}+2}\leq\dfrac{e^{x}}{e^{x}+2}$

b. *Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :* $\int_{-1}^{0}(x+1).e^{x}dx$

c. *Montrer alors que :* $\dfrac{1}{3e}\leq A\leq \ln\left(\dfrac{3e}{1+2e}\right)$

EXERCICE N°2 **05 pts**

Dans la figure suivante :

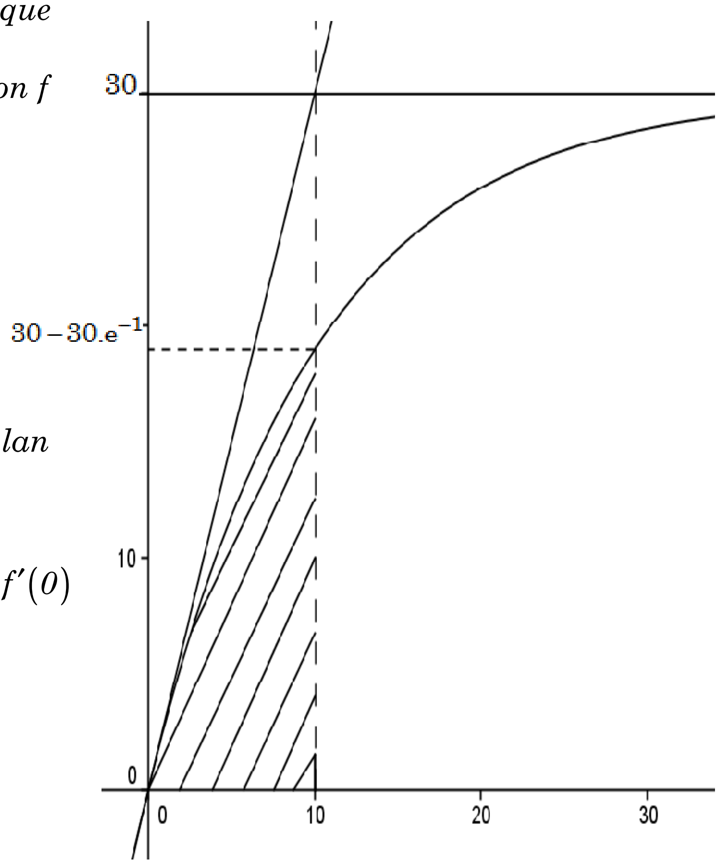
- *La courbe (C) est la représentation graphique*

Dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f

Solution de l'équation différentielle : $y' = ay + b$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

- *On a tracé la tangente à (C) au point O.*
- $f(10) = 30 - 30.e^{-1}$



On désigne par S l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan hachurée et on admet que : $S = 300.e^{-1}$

1°) a. *Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$*

b. *Déduire que : $b = 3$*

2°) a. *Montrer que pour tout réel x on a :*

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(f'(x) - 3\right)$$

b. *Déduire que : $S = \dfrac{-30.e^{-1}}{a}$*

c. *Montrer alors que : $a = -0,1$*

3°) *Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = 30 - 30.e^{-0,1.\,x}$ (On rappelle que f est la solution de l'équation différentielle : $y' = -0,1.y + 3$).*

4°) *On admet que la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ modélise les variations de la température $\theta(t)$ (exprimée en degré Celsius) en fonction de temps t (exprimé en minutes) d'un corps placé à un temps initial $t = 0$ dans un endroit à température ambiante constante.*

On a alors : $\theta(t) = 30 - 30.e^{-0,1.\,t}$

a. *Déterminer la température du corps au bout de 20 minutes.*

b. *Déterminer, à 10^{-1} prés, le temps t_0 à partir du quel la température dépassera $29\ ^\circ C$.*

c. *Calculer : $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$ puis interpréter le résultat.*

EXERCICE N°3 | 05 pts

Un responsable de magasin achète en grand nombre des pièces mécaniques d'un fournisseur.

- *50 °/ₒ de ces pièces sont d'origines dont 2 °/ₒ sont défectueuses.*
- *Le reste des pièces sont adaptables et dont 20 °/ₒ sont défectueuses.*

On prélève au hasard une pièce et considère les événements suivants :

- *D : << La pièce est défectueuse >>*
- *O : << La pièce est d'origine >>*

1°) a. *Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et d'origine ?*

b. *Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse et adaptable ?*

c. *Montrer que la probabilité p pour que la pièce prélevée soit non défectueuse est* $p = 0{,}89$

2°) *La duré de vie d'une pièce mécanique non défectueuse (exprimée en années) est une variable aléatoire continue X qui suit la loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ *.*

a. *Sachant que :* $p\left(X \geq 8\right) = 0{,}3$ *, déterminer la valeur, arrondie à* 10^{-2} *près, de* λ*.*

Par la suite on prendra : $\lambda = 0{,}15$ *.*

b. *Calculer la probabilité pour que cette pièce ait une durée de vie inferieure à 18 mois .*

c. *Sachant qu'une pièce à déjà 5 années de fonctionnement, quelle la probabilité pour qu'elle ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?*

3°) a. *Le responsable de magasin décide de commander 10 pièces étudiées qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre et ayant une durée de vie supérieure à 8 ans ?*

Quelle est la probabilité pour qu'il avait au moins une pièce ayant une durée de vie supérieure à 8 ans ?

b. *Déterminer le nombre minimal n des pièces qu'il doit commander pour que la probabilité d'avoir au moins une pièce ayant une durée de vie supérieure à 8 ans dans sa commande soit supérieure à 0,998 ?*

EXERCICE N°4 | 04 pts

Craignant une propagation d'une grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines consécutives. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations y	540	720	990	1340	1810	2440	3300

On pose : $z = \ln y$

1°) *Recopier et compléter le tableau suivant : les résultats sont arrondis à* 10^{-2} *prés.*

Rang de la semaine x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y$	6,29	6,58	6,90				

2°) a. *Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique* (x,z) *puis interpréter le résultat.*

b. *Déterminer une équation de la droite de régression de* z *en* x.

c. *Déduire que :* $y = a.e^{\beta x}$ *ou* a *et* β *sont deux réels à préciser.*

3°) a. *Donner une estimation du nombre des consultations hebdomadaire concernant cette grippe pendant la dixième semaine.*

b. *Déterminer la semaine a partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.*

BON TRAVAIL