Lycée Cité Ennozha Zaghouan	Devoir de synthèse N°3		Prof : KHEMIRI Fawzi
Année Scolaire 2013/2014	Epreuve :Mathématiques	Durée : 3 heures	Classe 4ième Sc Techniques2

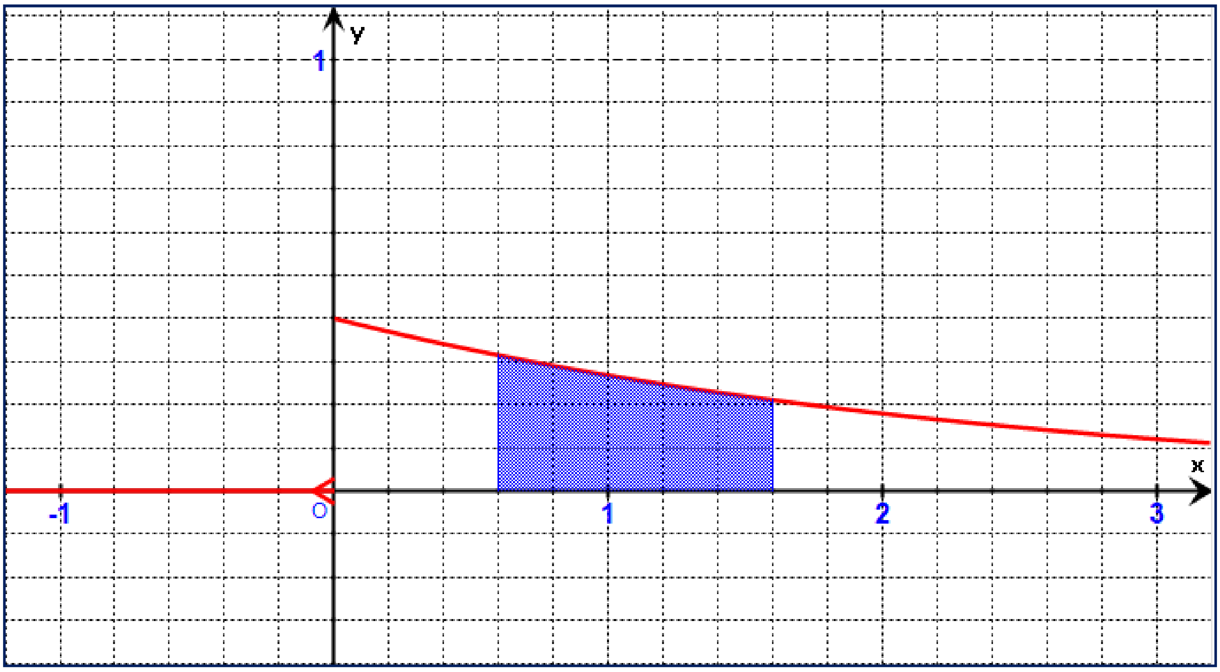
Exercice1 Vrai ou faux ....(3pts)

La durée de vie en années d'un composant électronique est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La fonction densité de probabilité f est représentée ci-dessous.

La courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;0.4)$.

Répondre par vrai ou faux **sans** justification aux assertions suivantes :

1. La durée de vie moyenne est 30 **mois**.
2. La probabilité de l'évènement $X \in [0.6;1.6]$ est inférieure ou égale à 0.2 .
3. Dans un lot de 10 composants tous identiques et fonctionnant de manière indépendante, la probabilité arrondie au millième qu'au moins un composant soit encore en marche au bout de 2 années est 0.997 .



Exercice2................(6pts)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(0)=0$ et $f(x)=x^2(\ln x-1)$ si $x>0$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a)** Montrer que f est dérivable à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Montrer que (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

   c) Etudier la position de (Γ) par rapport à l'axe des abscisses.

2. **a)** Montrer que pour $x>0$, $f'(x)=x(2\ln x-1)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (Γ) ainsi que sa demi-tangente au point *O* et sa tangente horizontale.

3. a) Montrer que le point *A* d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ est un point d'inflexion pour (Γ).

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à la courbe (Γ) au point *A*.

4. Soit *g* la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x - 1$ qui sera représentée par la courbe $\mathscr{C}$.

a) Etudier la position de (Γ) par rapport à $\mathscr{C}$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le même repère.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par les courbes (Γ) et $\mathscr{C}$.

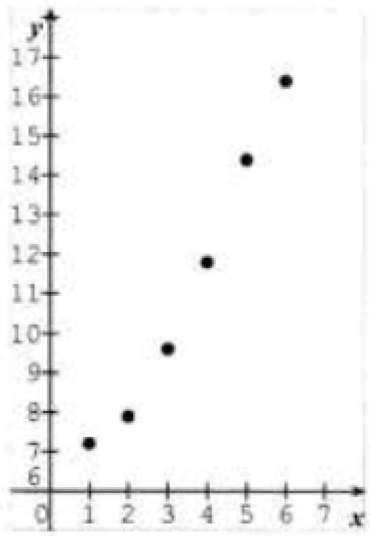
Exercice3................(5pts)

Le tableau suivant donne le pourcentage des familles tunisiennes possédant au moins un ordinateur

Année i	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Pourcentage y_i des familles	7,2	7,9	9,6	11,8	14,4	16,4

Source : I.N.S

(Les valeurs demandées seront données à 10^{-2} près).



1. Déterminer $\overline{x}$, $\overline{y}$ et σ_x .

2. Le nuage de points de la série statistique (x_i,y_i) représenté ci-contre suggère un ajustement exponentiel. On pose alors $z_i=\ln(y_i)$ pour tout $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

a) La droite de régression de z en x , obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation $z=\alpha x+\beta$. Donner les expressions de α et β en fonction de $Cov(X,Z)$, σ_x, $\overline{x}$ et $\overline{z}$.

b) Compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i			2,26			2,80

c) Donner les valeurs de $\overline{z}$ et $Cov(X,Z)$ et en déduire les valeurs de α et β.

3. a) Déterminer σ_z et $r(x,z)$. Justifier alors le choix de l'ajustement linéaire de *z* en *x*.

b) Vérifier que $y = a.e^{bx}$ (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près pour chacun des réels a et b).

c) D'après cet ajustement, quel serait le pourcentage des familles tunisiennes possédant au moins un ordinateur en 2015 ?

Exercice4................(6pts)

La durée de vie en années d'un engin est une variable continue X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Des études de qualité ont permis d'estimer que la probabilité que cet engin ne tombe pas en panne au bout de 3 années est 0.472 c'est-à-dire $p(X > 3) = 0.472$.

Les résultats seront arrondis au millième sauf autre consigne.

1. Montrer que la valeur de λ est 0.25.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements :

   A : « L'engin tombe en panne au bout de 5 années ».

   B : « L'engin ne subit aucune panne entre 2 et 5 années ».

   S: « L'engin demeure en état de marche au moins 2 années ».
3. On désigne par G la durée de garantie assurée par l'usine. 40 % des clients ont été dépannés.

   Montrer qu'au mois près cette garantie est 25 mois.
4. Un lot contient $\boldsymbol{n}$ engins identiques et fonctionnant d'une manière indépendante. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre d'engins dont la durée de vie dépasse 2 années.

   a) Donner la loi de probabilité de Y.

   b) Pour $\boldsymbol{n} = 6$, déterminer la probabilité qu'au moins un engin ait une durée de vie supérieure à deux années.

   c) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour $n \geq n_0$; $p(Y \geq 1) \geq 0.9999$.

   d) Pour cette valeur de n_0 , estimer le nombre d'engins en état de marche au bout de deux années.