Num :53633979

	Devoir de Synthèse N°1	4ème année
Le Mercredi 31/10/2018	MATHEMATIQUES	Durée : 2 H
Mr Bechir Fehri		

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte. L'élève doit indiquer sur sa copie, avec justification, le numéro de la question et la lettre convenable à la réponse choisie.

Une réponse correcte et justifiée vaut 0.75 point, une réponse correcte et non justifiée vaut 0.25 point et une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : f(x) $=x^2\left(1-\sin\frac{1}{x^2}\right)$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x) =$
   a) $+\infty$b) 0 c) 1
2) 1+i est une racine quatrième de :
   a) – 4 b) 4 c) 4i
3) Si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ alors $\arg(i\bar{z}) \equiv$
   a) $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ b) $-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c) $\frac{\pi}{3}[2\pi]$
4) L'équation $z^2 = (\bar{z})^2$ admet dans $\mathbb{C}$
   a) Une seule racine b) deux racines distincts c) une infinité de racines

Exercice 2 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur [-2, +∞[par : f(x) = x-1 + $\sqrt{x+2}$.

1) a) Montrer que f est continue sur [-2, +∞[.

b) montrer que f est strictement croissante sur [-2, +∞[.

2) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans]-1, 0[une unique solution α.

b) Donner un encadrement de α a 10^{-2} près.

3) donner le signe de f(x) sur [-1, 0].

4) a) Montrer que : $\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$

b) En déduire la valeur exacte de α.

5) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f\left(x^2\left(1-\cos\frac{\pi}{x}\right)\right)$ et $\lim_{x\to 1} f\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}\right)$

Num :53633979

Exercice 3 : (7 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2-(\sqrt{3}+3i)Z-2+2i\sqrt{3}=0$

1) a) Vérifier que : $(-\sqrt{3}+i)^2=2-2i\sqrt{3}$
   b) Résoudre l'équation (E)
2) Pour tout Z dans $\mathbb{C}$, on pose p(Z) $=Z^3-(\sqrt{3}+5i)Z^2-4(2-i\sqrt{3})Z+4(\sqrt{3}+i)$
   a) Calculer p(2i)
   b) Trouver les nombres complexes α et β tel que : pour tout Z dans $\mathbb{C}$ on a p(Z) = (Z-2i)($Z^2+\alpha Z+\beta$)
   c) Résoudre l'équation p(Z) = 0
3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 2i, b = $\sqrt{3}+i$ et c = $\sqrt{3}+3i$
   a) Donner l'écriture exponentielle de a et b. En déduire la construction des points A, B et C
   b) Donner l'écriture exponentielle dec et $\frac{c-a}{b-a}$.
   c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.
4) a) Vérifier que : b = c – a
   b) en déduire que le quadrilatère OBCA est un losange.

Exercice 4 : (4 points)

Soient Z_1 et Z_2 deux nombres complexes non nuls et non réels tels que : $Z_1\times Z_2=1$ et $|Z_1-Z_2|=2$. Soit r le module de Z_1 et θ un argument de Z_1. On suppose que r $\geq$ 1et$\theta\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1, 1, Z_1 et Z_2

1) a) Donner l'écriture exponentielle de Z_2.
   b) Montrer que : $|Z_1-Z_2|^2=r^2+\frac{1}{r^2}-2\cos 2\theta$
   c) Déduire que : $r-\frac{1}{r}=2\cos\theta$
2) Calculer les distances AM_2 et BM_1.
3) Montrer que : (AM_1) // (BM_2)
4) Soit Δ une demi-droite d'origine O incluse dans le premier quadrant et M_1 un point de Δ. Déduire de ce qui précède une construction de M_2.

Bon Travail..mr bechir