| Lycée Tahar Sfar Mahdia | **Devoir de synthèse n° 1** Mathématiques | Classe : 4 ème Sc $exp_1$ |
|---|---|---|
| Date : 24 / 01 / 2018 | Prof : MEDDEB Tarek | Durée : 2 heures |

*NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

## Exercice n°1 : (6 pts)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Soit $M$ le point tel que $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AE}$, où $m$ est un réel strictement positif.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

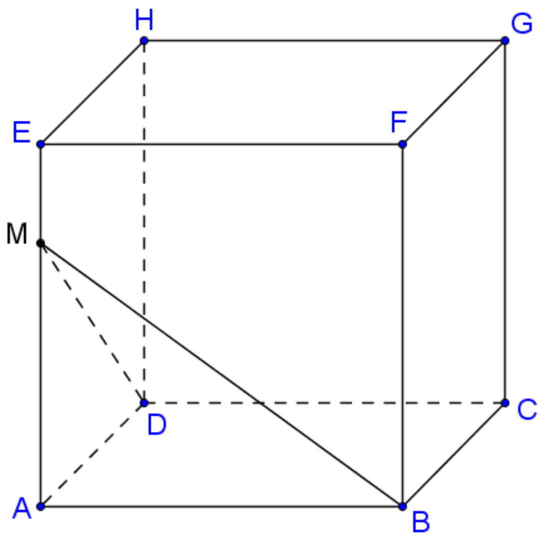
1) $a/$ Déterminer, en fonction de $m$, les composantes du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MD}$.

$b/$ On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle $MBD$. Montrer que $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{1+2m^2}}{2}$.

$c/$ Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABDM$.

$d/$ Soit $K$ le projeté orthogonal de $A$ sur le plan $(MBD)$.

Montrer que $AK = \dfrac{m}{\sqrt{1+2m^2}}$.




2) $a/$ Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $\overrightarrow{AK} = \alpha\vec{w}$.

$b/$ Montrer que $\overrightarrow{BK}.\vec{w} = 0$.

3) On suppose dans la suite que $M$ est le milieu de $[AE]$.

$a/$ En utilisant les résultats de la question 2), Montrer que $K$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3}\right)$.

$b/$ Vérifier que $K$ est l'orthocentre du triangle $BDM$.

## Exercice n°2 : (7 pts)

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

1) $a/$ Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

$b/$ Etablir le tableau de variations de $f$.

$c/$ Montrer que $f$ réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.

$d/$ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

$e/$ On donne sur la figure (1) de la feuille annexe la représentation graphique $\mathscr{C}$ de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Tracer $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de $f^{-1}$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\frac{1}{\cos x}\right) \; si\ x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[ \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$.

$a/$ Montrer que $g$ est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

$b/$ Montrer que pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

$c/$ Montrer que $g$ réalise une bijection de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[1\,;\sqrt{2}\right]$.

$d/$ Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

3) $a/$ Montrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $\left[1\,;\sqrt{2}\right[$.

$b/$ Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

$c/$ Montrer que, pour tout $x\in\left[1\,;\sqrt{2}\right[$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$.

## Exercice n°3 : *(7 pts)*

1) Soit $f$ la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$a/$ Dresser le tableau de variations de $f$.

$b/$ Montrer que la droite $\Delta : y=\frac{1}{2}x$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$.

$c/$ Tracer $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$ sur la feuille annexe figure (2).

2) Soit $U$ la suite définie sur $IN$ par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\frac{U_n^2+2}{2U_n} \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, on a : $U_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{\left(U_n-\sqrt{2}\right)^2}{2U_n}$.

$b/$ Montrer, par récurrence, que, pour tout $n\in IN$, $U_n>\sqrt{2}$.

$c/$ Montrer que la suite $U$ est décroissante.

$d/$ En déduire que la suite $U$ est convergente et déterminer sa limite.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in\left[\sqrt{2}\,;2\right]$, $0\le f'(x)\le\frac{1}{4}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, $0\le U_{n+1}-\sqrt{2}\le\frac{1}{4}\left(U_n-\sqrt{2}\right)$.

$c/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, $0\le U_n-\sqrt{2}\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

$d/$ Retrouver alors la limite de la suite $U$.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

# Devoir de synthèse n°1 ( 24 / 01 / 2018 )

Nom et prénom :…………………………………………………….................  Classe : 4 ème Sc exp 1

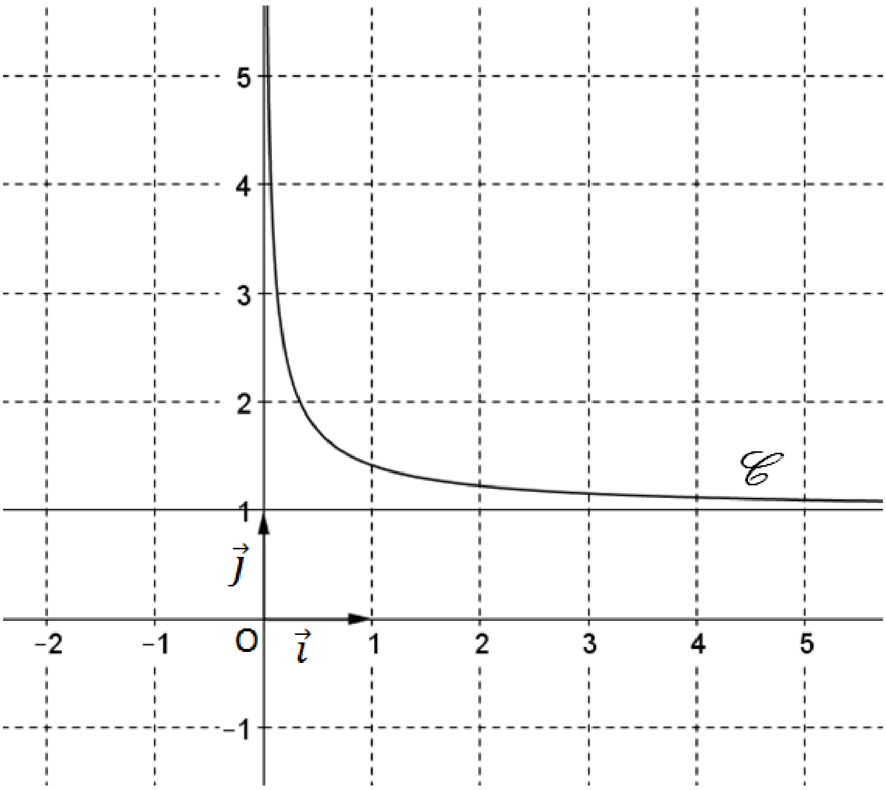



Figure (1)

Figure (2)