L.S :02/03/34
Goubellat

Date : 10/12/2014
Classe : 4^{eme} *année*
Prof :Hamdi

Devoir de Synthèse N°1

Section : Sciences Expérimentales

Epreuve : Mathématiques

Durée : 2h **Coefficient :3**

EXERCICE N° 1 (3 Pts)

Donner la réponse exacte

1°) Soit (U_n) la suite définie sur ℕ croissante et non majorée alors on a

a°) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$; b°) $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$; c°) $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) Soit la suite U définie par $U_n = 2^n \sin(\frac{1}{2^n})$

a°) a°) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$; b°) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$; c°) $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

3°) Soit un nombre complexe $Z = 2 \sin \alpha\, e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left]-\pi , 0\right[$ la forme trigonometrique de Z est :

a°) $[-2\sin\alpha \,;\, \alpha + \pi]$; b°) $[2\sin\alpha \,;\, \alpha]$; c°) $[1 \,;\, \alpha]$

EXERCICE N° 2 (5.5 Pts)

On considère les suites U et V définies sur ℕ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in ℕ \quad U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \\ V_0 = 7 \text{ et } \forall\, n \in ℕ \quad V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1 °) Montrer que la suite W définie par $W_n = U_n - V_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$

2 °) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $U_n \leq V_n$

3 °) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante

4 °) En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu' elles admettent la meme limite L

5 °) Soit la suite T définie sur ℕ par : $T_n = 3U_n + 4V_n$

a °) Montrer que la suite T est constante

b °) En déduire L

EXERCICE N° 3 (6 Pts)

1°) On considère la fonction g définie sur $[0 , \pi]$ par : $g(x) = x - 1 - \sin x$

a °) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{\pi}{2} , \pi\right]$

b °) Donner un encadrement de α d'amplitude $\frac{\pi}{4}$

c °) Vérifier que pour tout $x \in [0 , \alpha[$ on a : $g(x) \prec 0$ et pour tout $x \in]\alpha , \pi]$ on a : $g(x) \succ 0$

d °) Exprimer $\cos \alpha$ à l'aide de α

2 °) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = (x - 1)\sin x + \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x$

a °) Montrer que pour tout x de $[0, \pi]$ on a : $f'(x) = g(x)\cos x$

b °) Dresser le tableaux de variation de f

c °) Montrer que l'équation : $f'(x) = \frac{-2}{\pi}$ admet au moins une solution x_0 dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE N° 4 (5.5 Pts)

Soit l'équation (E_α) : $Z^3 + 3iZ^2 - (3 + e^{2i\alpha})Z - i(1 + e^{2i\alpha}) = 0$ avec $\alpha \in [-\pi, \pi[$

1 °) a °) Verifier que -i est une solution de (E_α).

b °) Verifier que :

$$Z^3 + 3iZ^2 - (3 + e^{2i\alpha})Z - i(1 + e^{2i\alpha}) = (z + i)(Z^2 + 2iZ - (1 + e^{2i\alpha}))$$

c °) Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α).

2 °) Dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$ on considere les points I , M et N d'affixe respectifs : $Z_I = -i$; $Z_M = e^{i\alpha} - i$ et $Z_N = -i - e^{i\alpha}$

a °) Montrer que I est le milieu de [M N]

b °) Montrer que si α varie dans $[-\pi, \pi[$ alors M varie sur un cercle de centre I dont on determinera son rayon.

c °) En deduire l'ensemble des points N lorsque M varie sur le cercle.

3 °) Dans la suite on suppose que $\alpha = 0$.

a °) Ecrire $\frac{Z_M}{Z_N}$ sous forme exponentielle.

b °) En deduire la nature du triangle O M N.

BONNE CHANCE