

EXERCICE N 1 (3 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

1/ Le nombre complexe $Z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est une racine :

a) Huitième de l'unité

b) Sixième de l'unité

c) Quatrième de l'unité

2/ Pour tout réel, l'équation (E) : $iz^2 - e^{-i\alpha}z + 1 = 0$ admet dans \mathbb{C} deux solutions z_1 et z_2 . On a donc :

a) $z_1 + z_2 = ie^{-i\alpha}$

b) $z_1 \cdot z_2 = i$

c) $z_1 + z_2 = -ie^{-i\alpha}$

3/ Soit z' et z'' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{6}$ on a :

a) $\frac{z''}{z'}$ est réel

b) $z' \cdot z''$ est réel

c) $z' \cdot z''$ est imaginaire pur

4/ Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ alors on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

a) 1

b) 0

c) $+\infty$

EXERCICE N 2 (5 points)

Soit l'application $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1-i)z - 4i$

1/ Calculer $f(2i)$ puis résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$

2/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points $A(2i)$, $B(e^{i\theta} + ie^{i\theta})$, $C(e^{i\theta} - ie^{i\theta})$ et $D(2e^{i\theta})$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) Montrer que pour tout réel $\theta \in [0, 2\pi[$, le triangle OBC est rectangle et isocèle en O .

c) Donner alors la nature du quadrilatère $OBDC$.

3/ On considère l'équation $(E') : \left(\frac{z+2i}{z}\right)^4 + 4 = 0$.

a) Déterminer l'ensemble \mathcal{F} des points M d'affixe z vérifiant : $|z + 2i| = \sqrt{2}|z|$.

b) Montrer que si z est une solution de (E') alors son point image M appartient à \mathcal{F} .

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E') .

EXERCICE N 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, -1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x - 1$ et C_f est sa courbe dans un R. O. $N(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, -1[$ et calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

2/ a) Montrer que la droite $\Delta : y = -2x - 1$ est une asymptote à la courbe C_f .

b) Tracer la courbe C_f .

3/a) Montrer que f admet une fonction réciproque g . Tracer la courbe C_g de g dans le même repère.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ on a $g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)$

EXERCICE N 4 (7 points)

Soit f une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} et f' la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} . On a représenté dans la page suivante et dans un repère orthogonal, les courbes de f et f' .

1) a) Justifier que (\mathcal{H}) est la co

b) Justifier que f admet quatre points d'inflexion. Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'inflexion d'abscisse $x_0 \in]1,6[$.

2) a) Montrer que la restriction g de f à $]-1,1[$ admet une fonction réciproque.

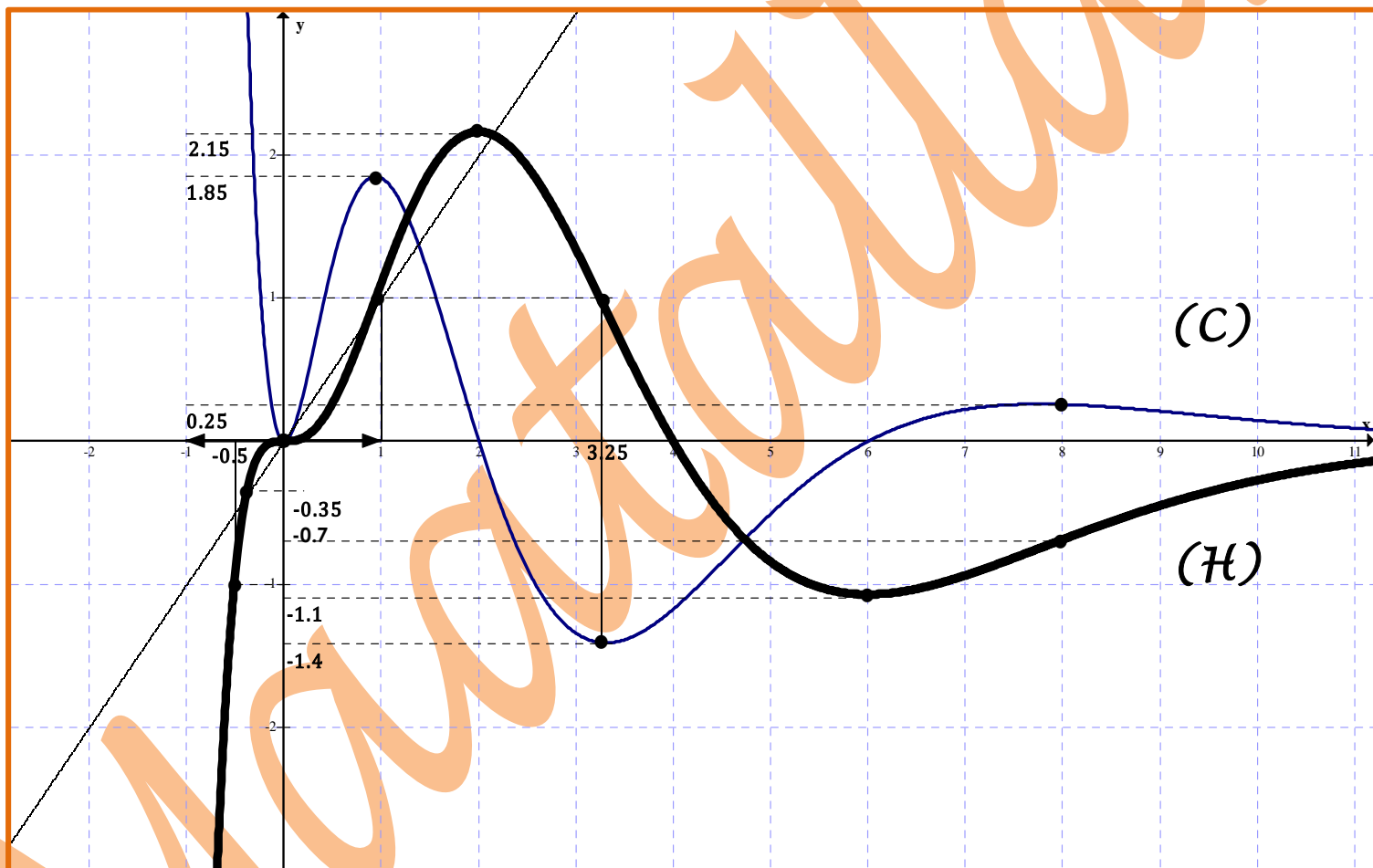
b) Déterminer graphiquement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{g^{-1}(x)}{x} \right]$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g^{-1}(x)}{x} \right]$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g^{-1}(x) - 1}{x - 1} \right]$.

c) Construire la courbe de g et la courbe de g^{-1} dans un repère orthonormé \mathbf{R} .

3) Soit la fonction U définie sur $]-1,0[$ par : $U(x) = f^2(x) + 2f(x) - 3$.

a) Etudier les variations de U . Montrer que : $U(x) = 0$ admet dans $]-1,0[$ une solution unique $\alpha < -\frac{1}{2}$.

b) Montrer que : $\alpha = g^{-1}(-3)$. Résoudre, alors, sur le graphique du repère \mathbf{R} , $U(x) = 0$.



Bon travail

Il sera tenu compte de la rédaction et la bonne présentation de la copie.