

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

LYCÉE THELEPTE
2011-2012
DURÉE : 3HEURES

Niveau : 4 ème Science
expérimentales
Epreuve : Mathématiques
Prof : Mhamdi Abderrazek

EX 1 : (3points)

Choisir **la** réponse correcte :

1) : L'équation $z^6=1-i$ admet dans \mathbb{C} exactement :

a) six solutions b) sept solutions c) cinq solutions

2) : L'équation $z^2=11-12i$ admet dans \mathbb{C} :

a) une racine double b) deux racines opposées c) deux racines conjuguées

3) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est égale à :

a) 0 b) $+\infty$ c) 1

EX 2: (5points)

1) : a). Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2-z+1=0$

b). Mettre les solutions sous forme exponentielle

c). Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E') : $z^4-z^2+1=0$

2) : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2-2\cos(\alpha)z+1=0$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

3) : on pose $f(z)=z^3-(i+2\cos(\alpha))z^2+(1+2i\cos(\alpha))z-i$ ($\forall z \in \mathbb{C}$)

a) . Montrer que $f(z)=(z-i)(z^2-2\cos(\alpha)z+1)$

b) . Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z)=0$

4) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points

A ; M et N d'affixes respectives i ; $e^{i\alpha}$ et $i + e^{i\alpha}$

a) . Montrer que le

quadrilatère OANM est un losange

b) . Déterminer les valeurs de α pour que l'aire du losange OANM soit égal à $\frac{1}{2}$

EX 3 : (5points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

1) : Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$



2) :a). Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) . Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J

c). Expliciter $f^{-1}(x) \forall x \in J$

3) :a). Montrer que $|f'(x)| - \frac{1}{4} = - \frac{[(x+1)^2 - 3]^2}{4(x^2 + 2x + 2)^2} ; \forall x \in [0; +\infty[$

b). En déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4} ; \forall x \in [0; +\infty[$

c). Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ et que $\frac{4}{5} \leq \alpha \leq 1$

4) : Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = \frac{45}{50}$ et $u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$

a). Montrer que $\frac{4}{5} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b). Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \forall n \in \mathbb{N}$

c). Montrer que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$; en déduire la limite de U .

EX 4 : (3points)

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

Montrer que l'équation $h'(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement quatre solutions .

EX 5: (4points)

La courbe ci-dessus représente une fonction g deux fois dérivable sur \mathbb{R}

Par lecture graphique répondre aux questions suivantes :

1) : a). Déterminer les équations des tangentes à la courbe de g aux points d'abscisses respectives : -1 ; 0 et 1

b). Résoudre dans \mathbb{R} les équations : $g'(x) = 0$ et $g''(x) = 0$

2) : a). Vérifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement trois solutions $x_0 < x_1 < x_2$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R}

b). Dresser le tableau de variation de g sur \mathbb{R}

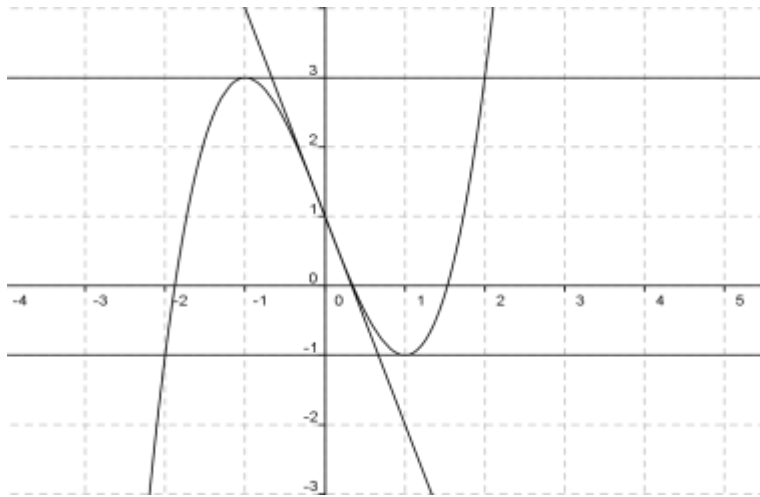
c). Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$

3) : Soit Ψ la restriction de g sur $[1; +\infty[$

a). Montrer que Ψ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera

b). Etudier la dérivabilité de Ψ^{-1} sur K

c). Dresser le tableau de variation de Ψ^{-1} sur K .



BON TRAVAIL