

-Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie-

EXERCICE : n°1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux :

- 1) Soit z un nombre complexe, on a : $|z+i| = |\bar{z}-i|$.
- 2) Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $z^2 - iz + 3 = 0$ alors $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
- 3) Les solutions de l'équation $z^4 = -16$ sont. $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- 4) Si $z = -3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$.

EXERCICE : n° 2 (6 points)

A) Pour tout z de \mathbb{C} , on pose $f(z) = 2z^3 - 2(1+i)z^2 + (1+2i)z - i$.

1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet dans \mathbb{C} une solution imaginaire pure z_0 .

2) a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout complexe z on a :

$$f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c).$$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

B) 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $2z^2 - 2(1 - \cos \theta)z + 1 - \cos \theta = 0$; avec $\theta \in]0, \pi[$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les

points M' et M'' d'affixes respectives $z' = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta + i \sin \theta)$ et $z'' = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta - i \sin \theta)$

a) Calculer $|z' - \frac{1}{2}|$ et $|z'' - \frac{1}{2}|$ et en déduire que les points M' et M'' appartiennent

à un même cercle que l'on caractérisera.

b) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

c) On considère Les points A, B et C du plan d'affixes respectives $Z_A = i, Z_B = 2z'$ et $Z_C = 2z''$ Déterminer les réels θ pour que ABCO soit un parallélogramme.

EXERCICE : n°3 (6 points)

I- Soit g la fonction définie par. $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

2/ Dresser le tableau de variation de g .

3/ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$

II- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1/a- Déterminer sur quel ensemble la fonction f est dérivable.

b- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = g(x)$.

c- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

d- Dresser le tableau de variation de f

2/ a- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I que l'on précisera.

b- Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité de f^{-1} , fonction réciproque de f .

c- Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

d- Calculer $(f^{-1})'(1)$.

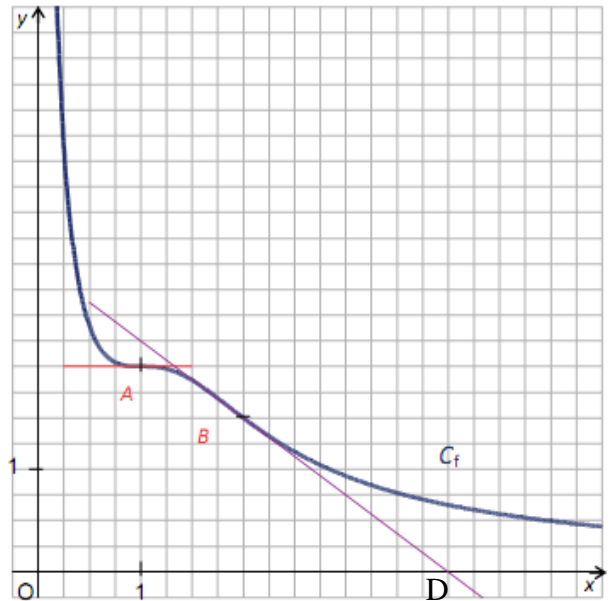
e- Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout $x \in I$

EXERCICE : n°4(5 points)

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f dérivable et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. On sait que la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1, la tangente à la courbe

C_f au point $B\left(2, \frac{3}{2}\right)$ passe par le point $D(4; 0)$

Par les lectures graphiques



1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) la fonction f admet-elle des points d'inflexions ? Justifier.

2) a) Justifier que la fonction f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur J .

Déterminer $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f^{-1}(2)$.

c) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et déterminer $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$.

d) Déterminer sur quel ensemble f^{-1} est dérivable.

3) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$ et h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = g \circ f(x)$.

a) Vérifier que h est dérivable en 1 et déterminer $h'(1)$.

b) Déterminer le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.