Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 1	4 Mathématiques 1
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 3 Heures	17 - 12 - 2020

EXERCICE N : 1 (3.5 points)

Dans l'annexe **(Figure 1)** on donne :

• R (**O** , $\vec{u}$, $\vec{v}$) un repère orthonormé direct • ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre **O** et de rayon 1 .

• **E** est le point de ($\mathscr{C}$) tel que ($\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}$) $\equiv \theta$ [2π] • **D** est le point d'affixe $Z_D = i\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

1) a) Vérifier que : $OD^2 = 1+\sqrt{2}$.

b) Soit **A** le point d'affixe $Z_A = Z_D\, e^{i\theta}$.

Vérifier que : $Z_A = OD\, e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ puis placer le point **A** dans le repère R .

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : E) $Z^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} Z + e^{i2\theta} = 0$.

a) Vérifier que Z_A est une solution de l'équation E) .

b) On désigne par **B** le point d'affixe Z_B **deuxième solution** de l'équation E) .

Prouver que : $Z_B = \dfrac{1}{OD} e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$

c) Montrer que **O** $\in$ [**AB**] .

3) a) Placer le point **C** d'affixe $Z_C = OD\, e^{i\theta}$.

b) Montrer que $\dfrac{aff(\overrightarrow{AC})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

c) Déduire la nature du triangle **ABC** puis construire le point **B** .

EXERCICE N : 2 (3 points)

On donne : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et on note par Ω son point image .

1) a) Vérifier que pour tout $Z \in \mathbb{C}$; $(1-Z)(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4) = 1-Z^5$.

b) Déduire que ; $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$.

2) Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}^*$; $\dfrac{1}{Z^2}(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4) = (Z+\dfrac{1}{Z})^2 + (Z+\dfrac{1}{Z}) - 1$.

3) On considère dans IR l'équation : E) $x^2 + x - 1 = 0$.

a) Vérifier que $(\omega + \dfrac{1}{\omega})$ est une solution de E) .

b) Résoudre dans IR l'équation E) .

c) Déduire que : $\cos(\dfrac{2\pi}{5}) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4) Dans l'annexe **(Figure 2)** le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

On donne les points I et **A** d'affixes respectifs $Z_I = -\dfrac{1}{4}$ et $Z_A = \dfrac{i}{2}$.

Le cercle (Γ) de centre I et passant par **A** coupe l'axe (O , $\vec{i}$) au point **H** .

a) Montrer que **OH** = $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$.

b) Construire alors **le polygone** dont les sommets sont les points images des racines **5èmes** de **l'unité**

EXERCICE N : 3 (4 points)

*Dans **(la figure 3)** de l'annexe, on a tracé dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = 3\sqrt{x+1}$ et $g(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x+1}$.*

***A)** Déterminer **graphiquement** les positions relatives de **(Cf)** et **(Cg)** .*

***B)** Soit $x \in [-1\,;3]$. On pose **M** et **N** deux points de même abscisse x et qui appartiennent respectivement à **(Cf)** et **(Cg)** et $\varphi(x) =$ **MN** .*

***1) a)** Justifier que : $\varphi(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}(3-x)$.*

***b)** Etudier la dérivabilité de φ à droite de - 1 .*

***2) a)** Dresser le tableau de variations de φ sur $[-1\,;3]$.*

***b)** Déduire alors la distance maximale **MN** . (**Donner la valeur exacte**)*

***3)** Tracer dans l'annexe la courbe (C_φ) ainsi que les demies- tangentes aux points d'abscisse - 1 et 3 .*

EXERCICE N : 4 (9.5 points)

I) Soit la fonction f définie sur $]-1\,,1[$ par : $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

***1) a)** Dresser le tableau de variations de f .*

***b)** Montrer que f réalise un bijection de $]-1\,;1[$ sur IR .*

***c)** Démontrer que pour tout $x \in IR$ on a : $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$.*

***2) a)** Etudier les variations de la fonction ψ dé finie sur $]-1\,;1[$ par : $\psi(x) = f(x) - x$.*

***b)** Montrer que l'équation : $\psi(x) = 0$ admet dans $]-1\,;1[$ une unique solution $\alpha \in]0\,;1[$.*

***c)** Déduire le signe de $\psi(x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.*

***II)** Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par : $U_0 \in [0\,,\alpha]$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.*

***1)** Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n \in [0\,,\alpha]$.*

***2) a)** Montrer que pour tout $x \in [0\,,\alpha]$ on a : $f^{-1}(x) \geq x$.*

***b)** Montrer alors que la suite (U_n) est monotone .*

***c)** Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite .*

***3)** Pour tout $x \in]-1\,;1[$, on pose : $h(x) = f\left(\cos\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]\right)$.*

***a)** Montrer que pour tout $x \in]-1\,;1[$ on a : $h(x) = -1 + \text{cotan}\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]$.*

***b)** Montrer que h admet une réciproque h^{-1} définie sur IR .*

***c)** Montrer que h^{-1} est dérivable sur IR et que $(h^{-1})'(x) = \dfrac{-2}{\pi((x+1)^2+1)}$.*

III) Pour tout $x \in IR^*$, on pose $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\frac{1}{x}-1)$.

1) Montrer que H est dérivable sur IR^* et pour tout $x \in IR^*$, $H'(x) = 0$.

2) a) Calculer $h(-\frac{1}{2})$, $h(\frac{1}{2})$, $H(-1)$ et $H(1)$.

b) En déduire que pour tout $x \in]-\infty\,;\,0[$, $H(x) = 1$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $H(x) = -1$.

3) Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $V_n = \sum_{k=1}^{n} [h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k})]$.

a) Montrer que pour tout $k \in IN^*$ on a : $h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k+1}) = -1$.

b) Déduire alors , que pour tout $n \in IN^*$ on a : $V_n = -n - h^{-1}(-\frac{1}{n+1})$.

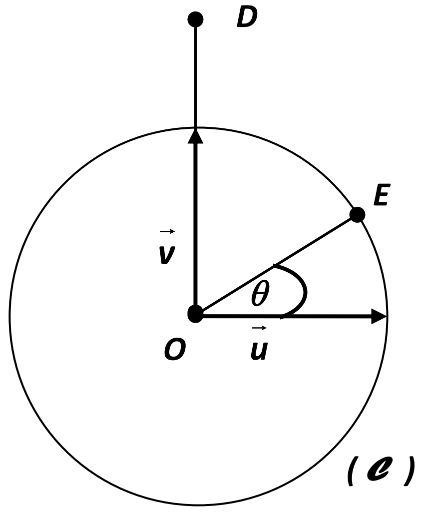
c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

Bonne chance

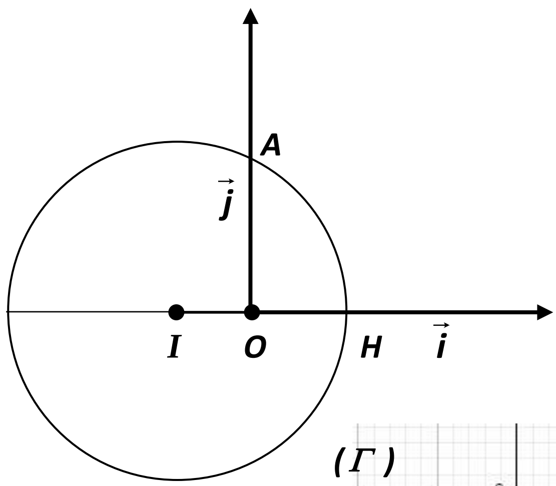
Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

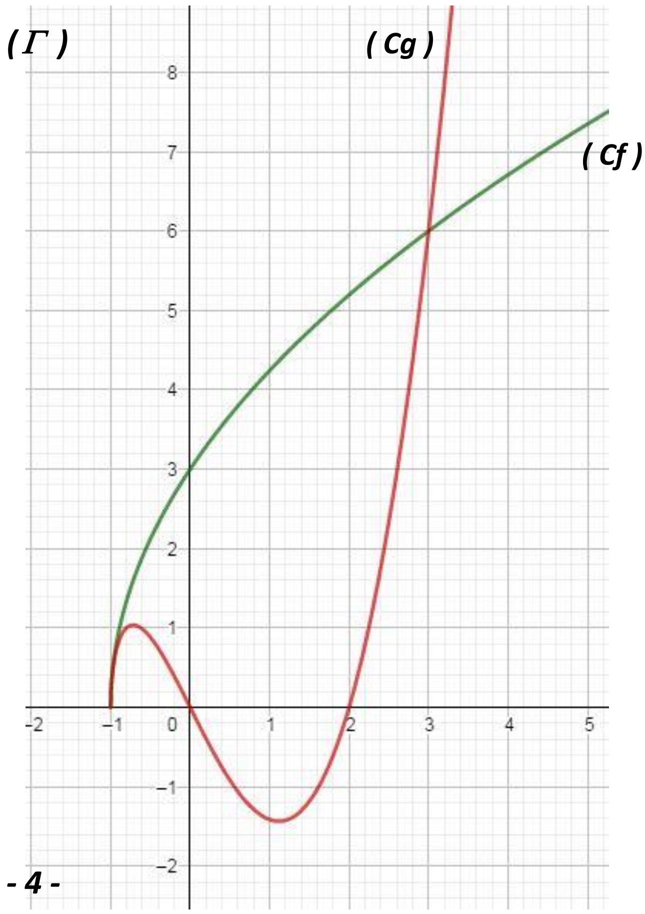
(Figure 1)



(Figure 2)



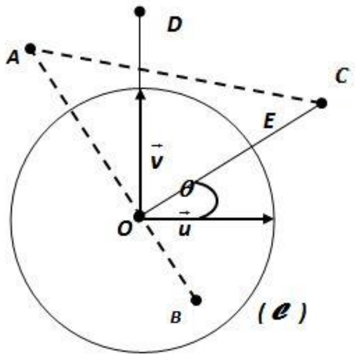
(Figure 3)



Correction Devoir de synthèse n 1 4 Mathématiques 1 (2020 - 2021)

EXERCICE N : 1 (3.5 points)

(Figure 1)



1) a) $OD^2 = |Z_D|^2 = |\, i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,|^2 = 1+\sqrt{2}$. **(0.25)**

b) $Z_A = Z_D\, e^{i\theta} = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\; e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}\, OD\, e^{i\theta} = OD\, e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$. **(0.25) + (0.25)**

2) a) $Z_A^{\,2} + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}\, e^{i\theta}\, Z_A + e^{i2\theta}$

$= (1+\sqrt{2})\, e^{i(2\theta+\pi)} + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}\, e^{i\theta}\, i\sqrt{1+\sqrt{2}} + e^{i2\theta}$

$= -(1+\sqrt{2})\, e^{i2\theta} + \sqrt{2}e^{i\theta} + e^{i2\theta} = 0$ donc Z_A est une solution de E) **(0.5)**

b) $Z_A\, Z_B = \dfrac{c}{a} = e^{i2\theta} \Leftrightarrow Z_B = \dfrac{e^{i2\theta}}{Z_A} = \dfrac{e^{i2\theta}}{OD\, e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}} = \dfrac{1}{OD}\, e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$. **(0.5)**

c) $Z_A \neq 0$, $\dfrac{aff(\overrightarrow{OB})}{aff(\overrightarrow{OA})} = \dfrac{1}{OD^2}\, e^{i\pi} = -\dfrac{1}{OD^2} < 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont **colinéaires** de **sens opposés** $\Leftrightarrow O \in [AB]$. **(0.5)**

3) a) **(0.25)**

b) $A \neq B$, $\dfrac{aff(\overrightarrow{AC})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \dfrac{OD\, e^{i\theta} - OD\, e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{\frac{1}{OD}\, e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} - OD\, e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}} = \dfrac{OD^2\, e^{i\theta}(1-i)}{-i\, e^{i\theta}(1+OD^2)} = \dfrac{OD^2}{(1+OD^2)}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}(1+i)$

$= \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. **(0.5)**

c) $\left|\dfrac{aff(\overrightarrow{AC})}{aff(\overrightarrow{AB})}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| = 1 \Leftrightarrow AC = AB \Rightarrow ABC$ est isocèle en A . **(0.25) + (0.25)**

EXERCICE N : 2 (3 points)

1) a) Pour tout $Z \in \mathbb{C}$; $(1-Z)(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4) = (1+Z+Z^2+Z^3+Z^4) - (Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5)$
$= 1 - Z^5$. **(0.25)**

b) $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = 1-\omega^5 = 1 - e^{i2\pi} = 1-1 = 0$ or $\omega \neq 1$ alors $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ **(0.25)**

2) $(Z+\frac{1}{Z})^2 + (Z+\frac{1}{Z}) - 1 = Z^2 + 2 + \frac{1}{Z^2} + Z + \frac{1}{Z} - 1 = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z} + 1 + Z + Z^2 = \frac{1}{Z^2}(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4)$. **(0.25)**

3) E) $x^2 + x - 1 = 0$. (**équation dans IR**)

a) $(\omega+\frac{1}{\omega})^2 + (\omega+\frac{1}{\omega}) - 1 = \frac{1}{\omega^2}(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = \frac{1}{\omega^2} . 0 = 0$.

de plus $(\omega+\frac{1}{\omega}) = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) \in IR \Rightarrow (\omega+\frac{1}{\omega})$ est une solution de E) . **(0.25) + (0.25)**

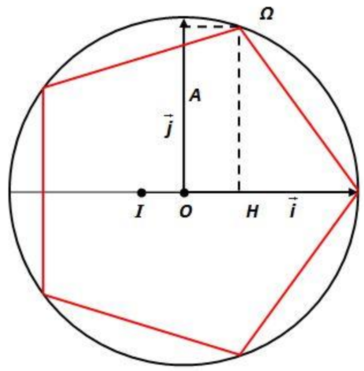
b) $\Delta = 1+4 = 5 \Rightarrow S_{IR} = \left\{ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$ **(0.25)**

c) $\omega + \frac{1}{\omega} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ est la solution **positive** de E) donc $2\cos(\frac{2\pi}{5}) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{2\pi}{5}) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ **(0.5)**

4) a) $OH = IH - IO = IA - IO = |Z_A - Z_I| - |Z_I|$

$= \left|\frac{i}{2} + \frac{1}{4}\right| - \left|-\frac{1}{4}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} - \frac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(\frac{2\pi}{5})$ **(0.5)**

(Figure 2)



b) **(0.5)**

EXERCICE N : 3 (4 points)

A)

x	-1		3	$+\infty$
Positions de **(C f)** par rapport à **(Cg)**		**(C f)** est au dessus de **(C g)**		**(C f)** est au dessous de **(C g)**
	A (- 1 , 0)		**B (3 , 6)**	

(0.5)

B) 1) a) $\varphi(x) = NM = |f(x) - g(x)|$ (pout tout $x \in [-1;3]$, **(C f)** est au dessus de **(C g)** $\Leftrightarrow g(x) \le f(x)$) .

$$= f(x) - g(x) = 3\sqrt{x+1} - (x^2 - 2x)\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}\,(3 - x^2 + 2x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}(3-x)(1+x)$$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}(3-x)$ pout tout $x \in [-1;3]$. **(0.5)**

b) $\varphi(-1) = 0$; $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+1)^{\frac{3}{2}}(3-x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)^{\frac{1}{2}}(3-x) = 0 = \varphi'_d(0)$

Donc φ est dérivable à droite de 0 . **(0.5)**

x	-1		$\frac{7}{5}$		3
$\varphi'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\varphi(\frac{7}{5})$	$\searrow$	0

2) a) $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto 3-x$ **(fonctions polynômes)** sont dérivables sur IR en particulier sur $]-1;3]$ de plus $\mathbf{x+1>0}$ sur ce intervalle alors

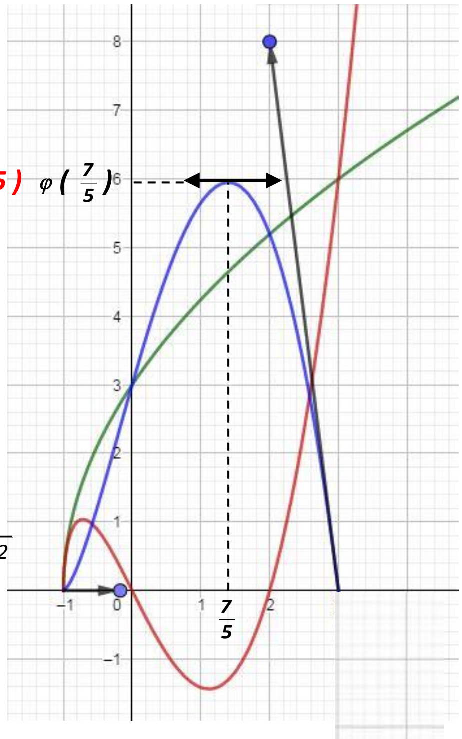
$x \mapsto (x+1)^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $]-1;3]$ donc de même pour φ .

$\forall\ x \in]-1;3]$, $\varphi'(x) = \dfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(3-x) - (x+1)^{\frac{3}{2}}$

$= (x+1)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{2}x - x - 1\right) = (x+1)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2}x\right)$

Donc $\varphi'(x)$ prend le signe de $(7-5x)$ sur $]-1;3]$. **(1)**

b) La distance maximale **MN** est $\varphi\left(\frac{7}{5}\right) = \dfrac{192}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **(Valeur exacte)** . **(0.5)**



3) $\varphi'_g(3) = (3+1)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2}.3\right) = 4^{\frac{1}{2}}(-4) = 2.(-4) = -8$. **(1)**

EXERCICE N : 4 (9.5 points)

I) **1) a)** $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$x \mapsto 1 - x^2$ et $x \mapsto x$ (**fonctions polynômes**) sont dérivables sur IR

en particulier sur $]-1:1[$ et $\mathbf{1-x^2>0}$ sur cet intervalle alors $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

est dérivable sur $]-1,1[$ donc de même pour f .

$$\forall\ x \in]-1;1[,\ f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}x}{1-x^2} = \frac{1-x^2-x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3} > 0$$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. **(0.5)**

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) f est dérivable sur $]-1,1[$ donc continue de plus strictement croissante par suite elle réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $f(]-1,1[) = IR$. **(0.5)**

c) $f\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\right) = -1 + \dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}}{\sqrt{1-\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}}} = -1 + \dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{(x+1)^2+1}}} = -1+x+1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$. **(0.5)**

2) a) $\psi(x) = f(x) - x$. ψ est dérivable sur $]-1,1[$ **(Somme de deux fonctions dérivables sur] - 1 , 1 [ )**

$$\psi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3} - 1 \geq 0 \text{ car } 0 < 1 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < (\sqrt{1-x^2})^3 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \psi(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \psi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) - x = +\infty$ **(0.5)**

x	-1		0		1
$\psi'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖
$\psi(x)$	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$ ‖

b) ψ est dérivable sur $]-1,1[$ donc continue de plus strictement croissante par suite elle réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\psi(]-1,1[) = IR$ or $0 \in IR$

donc il admet un unique antécédent $\alpha \in]-1;1[$ de plus $\psi(0) = f(0) = -1 < \psi(\alpha) \Rightarrow \alpha \in]0;1[$. **(0.5)**

c) ψ est strictement croissante sur $]-1,1[$ et $\psi(\alpha) = 0$ alors

x	-1		α		1
signe de $\psi(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

(0.25)

II) 1) Montrons que $\forall\ n \in IN$; $U_n \in [0,\alpha]$

* Pour $n = 0$, $U_0 \in [0,\alpha]$ la proposition est vraie

* Supposons que pour tout $n \in IN$ $U_n \in [0,\alpha]$ et montrons $U_{n+1} \in [0,\alpha]$

on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$ or f est croissante sur $]-1,1[\Leftrightarrow f^{-1}$ est croissante sur IR par suite

$f^{-1}(0) \leq f^{-1}(U_n) \leq f^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \leq \alpha$ **(car $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = \alpha$)** $\Rightarrow U_{n+1} \in [0,\alpha]$.

Conclusion : $\forall\ n \in IN$; $U_n \in [0,\alpha]$. **(0.5)**

2) a) $\forall\ x \in [0,\alpha]$, $\psi(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq f^{-1}(x)$. **(0.25)**

b) $\forall\ n \in IN$; $U_n \in [0,\alpha]$, **2) a)** $\Rightarrow U_n \leq f^{-1}(U_n) \Leftrightarrow U_n \leq U_{n+1}$ donc (U_n) est croissante sur IN . **(0.25)**

c) (U_n) est croissante et majorée par α donc converge vers un réel $l \in [0,\alpha]$ **(0.25)** or $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(U_n)$, f^{-1} est continue sur IR en particulier en l par suite $l = f(l) \Leftrightarrow \psi(l) = 0$

$\Leftrightarrow l = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$ **(0.25)** .

3) a) Pour tout $x \in]-1;1[$, $h(x) = f(\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)]) - 1 = \dfrac{\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)]}{\sqrt{1-\cos^2[\frac{\pi}{2}(x+1)]}}$

$$= -1 + \frac{\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)]}{|\sin[\frac{\pi}{2}(x+1)]|} \text{ or } \frac{\pi}{2}(x+1) \in]0;\pi[\Rightarrow h(x) = -1 + \cotan[\frac{\pi}{2}(x+1)]$$. **(0.5)**

b) $x \mapsto \cotan x$ dérivable sur $IR \setminus \{k\pi, k \in Z\}$ or $\frac{\pi}{2}(x+1) \in]0;\pi[$ pour tout $x \in]-1;1[$

donc h est dérivable sur $]-1;1[$, $\forall\ x \in]-1;1[$, $h'(x) = -\frac{\pi}{2}(1 + \cotan^2[\frac{\pi}{2}(x+1)]) < 0$

$\Rightarrow$ h admet une réciproque h^{-1} définie sur $h(]-1;1[) =]\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) ; \lim\limits_{x\to -1^+} h(x)[= IR$. **(0.5)**

c) h est dérivable sur $]-1;1[$ et $h'(x) \neq 0$ sur cet intervalle alors h^{-1} est dérivable sur IR et $\forall\ x \in IR$ **(0.25)** ,

$(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{h'(y)}$ **(avec $y = h^{-1}(x) \Leftrightarrow h(y) = x \Leftrightarrow -1 + \cotan[\frac{\pi}{2}(y+1)] = x \Rightarrow \cotan^2[\frac{\pi}{2}(y+1)] = (x+1)^2$)**

$$= \frac{1}{-\frac{\pi}{2}(1+\cotan^2[\frac{\pi}{2}(y+1)])} = \frac{-2}{\pi((x+1)^2+1)}\ .\ \textcolor{red}{(0.5)}$$

III) Pour tout $x \in IR^*$, $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\frac{1}{x}-1)$.

1) $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto \frac{1}{x}-1$ sont dérivables sur IR^* et h^{-1} est dérivable sur IR alors H est dérivable sur IR^* . **(0.25)**

$$\forall\ x \in IR^*,\ H'(x) = 1.(h^{-1})'(x-1) - \frac{1}{x^2}(h^{-1})'(\frac{1}{x}-1) = \frac{-2}{\pi((x-1+1)^2+1)} - \frac{1}{x^2}\frac{-2}{\pi((\frac{1}{x}-1+1)^2+1)}$$

$$= \frac{-2}{\pi(x^2+1)} + \frac{2}{x^2\pi(\frac{1}{x^2}+1)} = \frac{-2}{\pi(x^2+1)} + \frac{-2}{\pi(1+x^2)} = 0\ .\ \textcolor{red}{(0.5)}$$

2) a) $h(-\frac{1}{2}) = 0$; $h(\frac{1}{2}) = -2$; $H(-1) = 2\ h^{-1}(-2) = 2.\frac{1}{2} = 1$ et $H(1) = 2\ h^{-1}(0) = 2(-\frac{1}{2}) = -1$. **(1)**

b) $\forall\ x \in IR^*$, $H'(x) = 0$ alors H est constante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$

donc $\forall\ x \in]-\infty\,;\,0[\,;\, H(x) = H(-1) = 1$ et $\forall\ x \in]0\,;+\infty[\,;\, H(x) = H(1) = -1$. **(0.5)**

3) a) Soit $k \in IN^*$, $\frac{1}{k} = (\frac{1}{k}+1)-1$ et $\frac{1}{\frac{1}{k}+1} - 1 = \frac{k}{k+1} - 1 = -\frac{1}{k+1}$

donc $h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k+1}) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\frac{1}{x}-1)$ **(avec** $x = \frac{1}{k}+1$ **)**

$= -1$ **(car** $x \in]0\,;+\infty[$ **)** **(0.5)**

b) $V_n = \sum_{k=1}^{n}[h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k})] = \sum_{k=1}^{n}[-1 - h^{-1}(-\frac{1}{k+1}) + h^{-1}(-\frac{1}{k})] = \sum_{k=1}^{n}(-1) - \sum_{k=1}^{n}[h^{-1}(-\frac{1}{k+1})] + \sum_{k=1}^{n}[h^{-1}(-\frac{1}{k})]$

$= -n - [h^{-1}(-\frac{1}{2}) + h^{-1}(-\frac{1}{3}) + \ldots\ldots + h^{-1}(-\frac{1}{n+1})] + [h^{-1}(-1) + h^{-1}(-\frac{1}{2}) + \ldots\ldots + h^{-1}(-\frac{1}{n})] = -n + h^{-1}(-1) - h^{-1}(-\frac{1}{n+1})$

$\Leftrightarrow V_n = -n - h^{-1}(-\frac{1}{n+1})$ **(car** $0 \in]-1\,;1[$ **et** $h(0) = -1 \Rightarrow h^{-1}(-1) = 0$ **)** **(0.5)**

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$ et h^{-1} est continue en 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(-\frac{1}{n+1}) = h^{-1}(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$. **(0.25)**