Lycée Secondaire M. Bourguiba &	**DEVOIR DE SYNTHESE N° 1**	**Prof : Haouati Chokri**	
Date: 15/12/2020	**MATHEMATIQUES**	**4M**	**Durée : 3h**

Exercice N°1(3points)

Répondre par vrai ou faux avec justification

1) Soit f une fonction dérivable sur IR tel que $\forall x \in IR$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(\dfrac{1}{x})$ alors g'(x)= $\dfrac{-1}{x^2+1}$
2) Soit f une fonction dérivable sur IR tel que $\forall x \in IR,$ $f'(x) \geq f'(0)$ alors A(0,f(0)) est un point d'inflexion de Cf
3) ABCD est un carré direct de centre O et I le milieu de [AB]
   a) l'isometrie $S_{(AD)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(BC)}$ est la symetrie orthogonale d'axe (OI)
   b) L'ensembe des points M du plan tels que $S_{(AB)}(M) = S_A(M)$ est la droite (AB)

Exercice N°2(5points)

Soit $\theta \in [-\pi,\pi[$ et soit f_θ l'application du plan dans le plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que z'=$i\,\overline{z} + \sqrt{2}e^{i\theta}$

1) Montrer que f_θ est une isometrie du plan
2) Soit M et M' d'affixes respectives z=x+iy et z'= x'+iy'.

   Montrer que f(M)=M' $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = y + \sqrt{2}\cos\theta \\ y' = x + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$
3) Soit $I_\theta = \{M \in P \ \ tel \ \ que \ \ f_\theta(M) = M\}$
   a) Montrer que si $(\cos\theta + \sin\theta) \neq 0$ $alors$ $I_\theta = \varnothing$
   b) Montrer que $I_{-\frac{\pi}{4}}$ et $I_{\frac{3\pi}{4}}$ sont deux droites dont on donnera une équation pour chacune d'elles
   c) En déduire la nature et les élements caractéristiques de chacunes des applications $f_{-\frac{\pi}{4}}$ et $f_{\frac{3\pi}{4}}$
4) On suppose que $\theta \in [-\pi,\pi[\setminus \left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$
   a) Verifier que f_θ n'admet pas de point invariant
   b) Determiner l'affixe de $f_\theta(O)$ et $f_\theta(I)$ ou $z_O = 0$ et $z_I = 1$
   c) En déduire que f_θ est une symetrie glissante

Exercice N°3(6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$ *par* $f(x)=x+1-\sqrt{x^2-4}$

1) Etudier la dérivabilité de f a gauche en -2 et a droite en 2 .interpreter les résultats obtenu
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpreter graphiquement le résultat
3) a) Montrer que la droite D : y=2x+1 est une asymptote oblique a Cf au voisinage de $-\infty$
   b) Etudier la position relative de C_f et D sur $]-\infty,-2]$
4) Dresser le tableau de variation de f
5) Construire C_f et D
6) Soit $\varphi(x)=f(1+\tan x)$ *définie sur* $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$
   a) Justifier que φ est decroissante sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$
   b) Montrer que $\forall n\geq 2$ l'équation $\varphi(x)=3-\frac{1}{n}$ admet une solution unique (α_n) dans $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$
   c) Vérifier que $\forall n\geq 2$, *on a* $\varphi(\alpha_n)<\varphi(\alpha_{n+1})$
   d) En déduire que (α_n) est convergente et déterminer sa limite
7) Soit la suite $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{n^2}{k})$,$n\geq 2$
   a) Montrer que $\forall n\geq 2, o\ a\quad f(n^2)\leq u_n\leq f(n)$
   b) En déduire que (u_n) est convergente et determiner sa limite

<u>Exercice N°4(6points)</u>

Dans l'annexe ci-joint , on considere le triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et les deux triangles ACD et ABE sont isoceles et rectangle en A

On désigne par I,J et K les milieux respectifs de [CD] ,[AC] et [AD]

Soit f une isometrie qui envoie A sur D et C sur A

1) On suppose que f fixe un point
   a) Montrer que f est une rotation
   b) Donner les elements caractéristiques de f
   c) Construire le point F =f(B)
   d) Montrer que les points A,C et F sont alignés
2) a) Vérifier que $f=S_{(IK)}\circ S_{(AI)}$

   b)Identifier $R=S_{(AI)}\circ S_{(AJ)}$

   c) Caracteriser $g=f\circ R$

   d) Déterminer g(E) .En déduire que AEFD est un parallelogramme

3) On suppose que f n'admet pas de point fixe

   a) Montrer que f est une symetrie glissante

b) Déterminer les élements caracteristiques de f

4) Soit $\psi = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(AC)}$

a) Identifier $\psi \circ S_{(IK)}$

b) En déduire que ψ est une symetrie glissante que l'on caracterisera