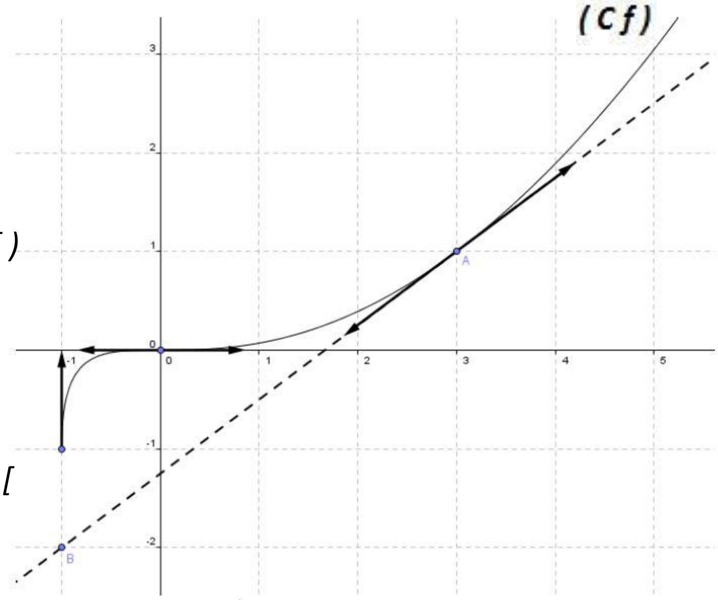
Lycée Houmet Souk 1	Devoir de Synthèse N : 1	4 Mathématique
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 3 Heures	09 - 12 - 2014

EXERCICE N : 1 (3 points)



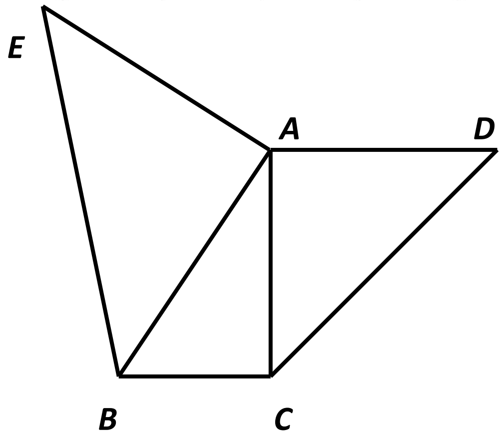
1) Justifier que f est une bijection de $[-1 ; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera

2) Déterminer : $f'(3)$; $f''(0)$; $f^{-1}([-1;1[)$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} \frac{f^{-1}(x)-3}{x-1} .$$

3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]0,1[$ vérifiant : $(f^{-1})'(\alpha) = 3$.

EXERCICE N : 2 (5 points)



Dans le plan orienté dans le sens direct ,

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et les triangles ACD et AEB isocèles directs et rectangles en A . On désigne par I , J et K les milieux respectifs de $[CD]$, $[AC]$ et $[AD]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie A en D et C en A .

b) Prouver que φ est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Soit le point $F = \varphi(B)$. Montrer que les points A , C et F sont alignés .

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $T = \varphi \circ R$.

a) Déterminer $T(E)$.

b) Montrer que T est une translation dont déterminera le vecteur .

c) En déduire que AEFD est un parallélogramme .

3) Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A sur D et C sur A .

a) Montrer que ψ est une symétrie glissante .

b) Déterminer la forme réduite de ψ .

4) Soit J' le symétrique de J par rapport à I .

a) Déterminer $\psi \circ T^{-1}(D)$ et prouver que $\psi \circ T^{-1}(J') = K$.

b) Déduire que $\psi \circ T^{-1} = S_{(CD)}$

c) Déterminer alors l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\psi(M) = T(M)$.

EXERCICE N : 3 (5 points)

Soit l'équation **(E_θ)** : $Z^2 - 2\cos(2\theta)Z + 2i\sin(2\theta) = 0$; $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

A) 1) a) Montrer que : $[1 - i\sin(2\theta)]^2 = \cos^2(2\theta) - 2i\sin(2\theta)$.

b) Résoudre dans □ l'équation **(E_θ)** .

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points I , A , M et M' , d'affixes respectives :

$Z_I = -1$, $Z_A = -2$, $Z_M = e^{2i\theta} - 1$ et $Z_{M'} = e^{-2i\theta} + 1$.

Soit $g : P \to P$; $N_Z \mapsto N'_{Z'}$ tel que $Z' = \overline{Z} + 2$.

1) Montrer que g est la symétrie glissante de vecteur $2\vec{u}$ et d'axe la droite $(O, \vec{u})$.

2) a) Déterminer et construire l'ensemble **(Γ)** des points M lorsque θ varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

b) Prouver que $g(M) = M'$ puis déduire la construction de l'ensemble **(Γ')** des points M' lorsque θ varie dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3) a) Ecrire chacun des nombres complexes Z_M et $Z_{M'}$ sous forme exponentielle .

b) Déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{OM'}; \overrightarrow{OM}}) \equiv 2\theta + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

c) Déterminer la valeur de θ pour que O , M et M' soient alignés .

4) a) Pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, déterminer l'affixe du point P tel que $OMPM'$ est un parallélogramme .

b) Montrer que l'aire de $OMPM'$ est $|\sin(4\theta)|$.

c) Déduire les valeurs de θ pour que l'aire de $OMPM'$ soit maximal .

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) Soit la fonction f définie sur $]1, 2]$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$.

On désigne par **(C_f)** la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Montrer que f est dérivable sur $]1, 2[$ et prouver que pour tout $x \in]1, 2[$; $f'(x) < 0$.

2) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1, 2]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

c) Montrer que pour tout $x \in J$; $f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $]1, 2]$ une unique solution α .

B) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ pour tout $n \in IN$.

1) Montrer que pour tout $n \in IN$; $1 \leq U_n \leq 2$.

2) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$; $|(f^{-1})'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Montrer que pour tout $n \in IN$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

4) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

C) *Soit la fonction* g *définie sur* $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,]$ *par :* $g\,(\frac{\pi}{4}) = 1$ *et* $g\,(x) = \dfrac{1}{f^{-1}(\operatorname{tg} 2x)}$ *si* $x \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

1) *Montrer que pour tout* $x \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,]$; $g\,(x) = \dfrac{1}{1+\cos 2x}$.

2) *Justifier que* g *admet une réciproque* g^{-1} *définie sur* $[\,\frac{1}{2}\,,\,1\,]$.

3) *Montrer que* g^{-1} *est dérivable sur* $]\,\frac{1}{2}\,,\,1\,]$ *et que* $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.