

<i>L. Regueb</i>	<i>Mathématiques</i>	<i>Classe : 4^{ème} M</i>
<i>Prof : Salhi Nouredine</i>	<i>Devoir de Synthèse No1</i>	<i>Le:09/12/2014 D:3h</i>

Exercice1(5pts)

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments [BC], [AB] et [AC], et soit D le symétrique de B par rapport à O.

- 1) Prouver que ABCD est un losange.
- 2) Caractériser chacune des isométries suivantes.
 - a) $f = S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$
 - b) $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$
 - c) $h = f \circ g$
- 3) Soit $\varphi = t_{\overline{AB}} \circ S_{(AC)}$.
 - a) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$; en déduire $(\varphi \circ \varphi)(A)$.
 - b) Montrer que φ n'est pas une symétrie orthogonale.
 - c) Prouver que φ est une symétrie glissante et donner son axe et son vecteur.

Exercice2(8pts)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$

- 1)a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 2) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0,1]$.
- 3) Tracer dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes représentatives de f et f^{-1} .
- 4) Expliciter $f^{-1}(x)$; $x \in]0, 1]$.
- 5) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose : $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) + \tan(x)$.
 - a) Etudier les variations de g.

En déduire que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer la dérivée.

Exercice 3 (7pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par B le point d'affixe 1 et a un nombre complexe différent de 1.

Soit f l'application définie par : $f : P \setminus \{B\} \rightarrow P, M(z) \rightarrow M'(z')$ telle que $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont solutions de l'équation : (E) : $z^2 - 2z + a = 0$.

2) On suppose que $a = 1 + e^{i2\theta}$ avec $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

b) Mettre chacune des solutions de (E) sous forme exponentielle.

3) On note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1 + ie^{i\theta}$ et $1 - ie^{i\theta}$ avec $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

a) Déterminer et construire les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie dans $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

b) Montrer que pour tout $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, le triangle OM_1M_2 est rectangle en O .

c) Déterminer θ dans $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

4) Dans cette partie on suppose que $a = -1 = z_A$.

a) Montrer que $(\vec{u}, \widehat{BM}) + (\vec{u}, \widehat{BM'}) \equiv 0 [2\pi]$.

En déduire que la demi-droite $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $(\widehat{BM}, \widehat{BM'})$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B .