

**Exercice 1 ( 2 points)**

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

- 1) Soit  $f$  une fonction dérivable et strictement croissante sur  $[-1, 2]$  vérifiant  $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ . alors :
  - a- il existe un réel  $\alpha \in ]-1, 2[$  vérifiant :  $3f'(\alpha) - f(2) + f(-1) = 0$
  - b- On suppose que  $f(-1) = 0$  et que  $f(2) = 1$  alors la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $\beta = f(\alpha)$  et que  $(f^{-1})'(\beta) = 3$
  - c- l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\lambda \in ]-1, 2[$
- 2) Si  $f$  est une isométrie sans points fixes alors  $f \circ f$  est une translation.

**Exercice 2 ( 4 points)**

Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $[0, 2\pi[$

1) a/ résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $z^2 - (2i - ie^{-i\theta})z - 1 + e^{-i\theta} = 0$

b) Mettre les solutions sous la forme exponentielle

2) le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B et N d'affixes respectives :  $i$ ,  $3i$ , et  $i - ie^{-i\theta}$

a) Montrer que l'ensemble des points N lorsque  $\theta$  varie dans  $[0, 2\pi[$  est un cercle ( $\Gamma$ ) que l'on précisera

b) Déterminer les valeurs de  $\theta$  de  $[0, 2\pi[$  tel que la droite (BN) est tangente au cercle ( $\Gamma$ ).

**Exercice 3 ( 6 points)**

A] Soit  $n$  un entier naturel non nul .

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{1}{n}x^3 + 3x - 2$ .

- 1) a/ Etudier les variations de  $f_n$  .  
 b/ Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha_n$  dans  $\mathbb{R}$  puis vérifier que  $0 < \alpha_n < 1$   
 c/ En déduire le signe de  $f_n(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$
- 2) a/ Montrer que  $f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{(\alpha_{n+1})^3}{n(n+1)}$ . En déduire le signe de  $f_n(\alpha_{n+1})$   
 b/ En déduire le sens de variation de la suite  $(\alpha_n)$   
 c/ En déduire que suite  $(\alpha_n)$  est convergente et déterminer sa limite .

B] soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2(x^3+1)}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 1 + \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que  $G$  est dérivable en 1
- 2) a/ montrer que pour  $x \in ]-\infty, 1[$  on a :  $G'(x) = \frac{2x f_1(x)}{(x^2+1)^2}$   
 b/ Dresser le tableau de variation de  $G$  .
- 3) a/ Etudier les branches infinies de (C)  
 b/ Tracer la courbe (C) . ( on prendra  $\alpha_1 = 0.6$  )

### Exercice 4( 4 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, \pi[$  par  $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

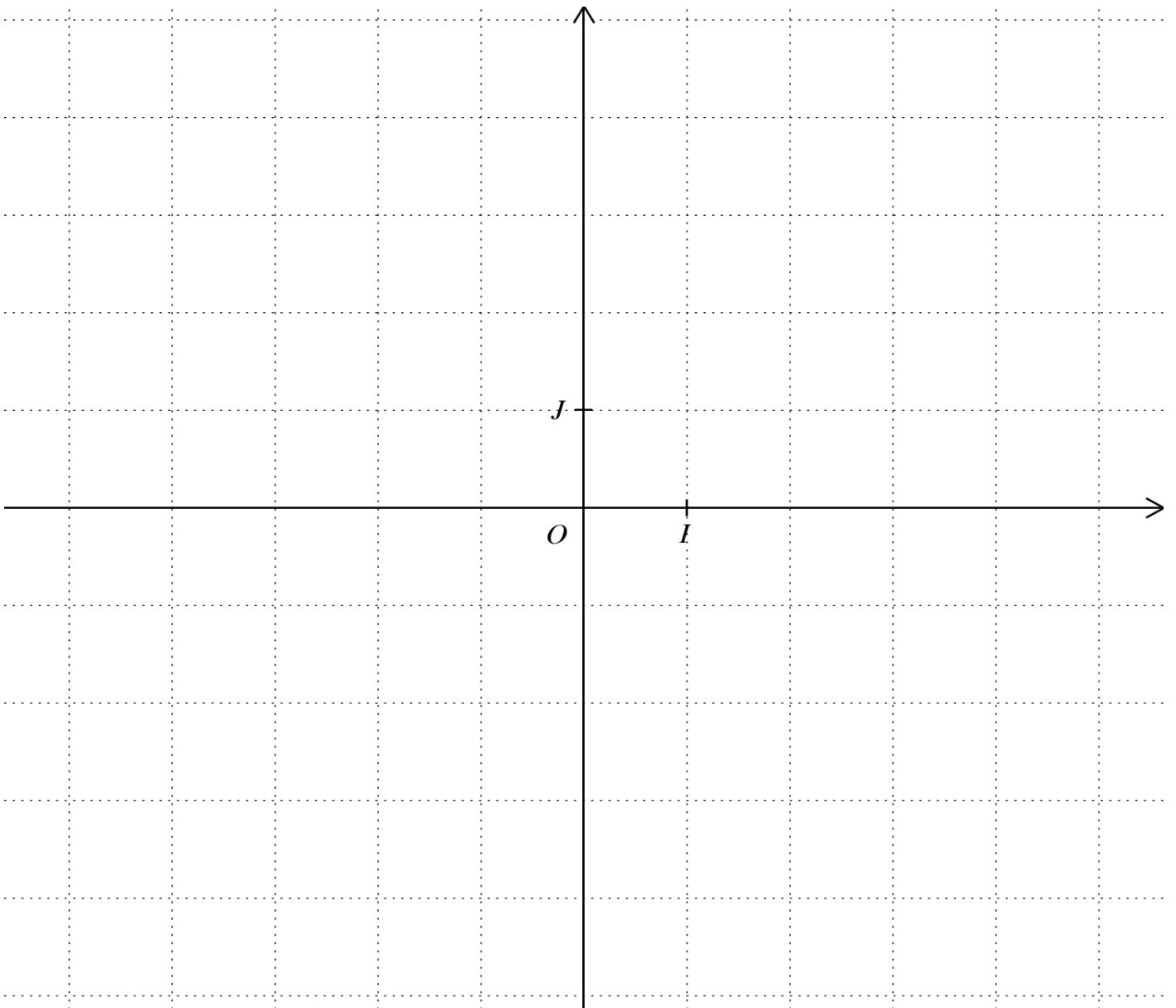
- 1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera
- 2) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et montrer que  $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
- 3) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  on pose  $\varphi(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 
  - a/ Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $\varphi'(x)$
  - b/ Calculer  $f^{-1}(1)$  puis déduire que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  ;  $f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi - f^{-1}(\sqrt{x})$
- 4) On considère les deux suites  $U$  et  $V$  définies sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(\sqrt{k})$  et  $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 
  - a/ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq U_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$
  - b/ En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite .
  - c/ Exprimer  $V_n$  en fonction de  $U_n$  ; puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  .

### Exercice 5( 4 points)

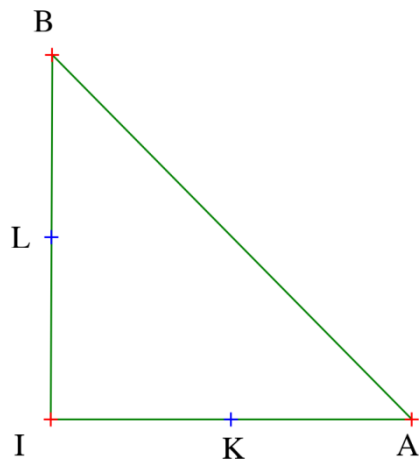
Dans le plan orienté , on considère un triangle rectangle isocèle  $IAB$  tel que  $(\vec{IA}, \vec{IB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ,  $K = I * A$  et  $L = I * B$

- 1) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  tel que  $f(A) = I$  et  $f(I) = B$  . Montrer que  $f$  est une rotation, préciser son centre  $\Omega$  .
- 2) On note  $H = S_A(I)$  et  $\Delta$  la perpendiculaire à  $(\Omega H)$  en  $\Omega$  qui coupe  $(BI)$  en  $C$ 
  - a) Déterminer  $f((AI))$  et  $f((\Omega H))$  .
  - b) En déduire  $f(H)$  .
  - c) Montrer alors que  $C$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $I$  .
- 3) a) Soit  $g$  l'antidépacement tel que  $g(A) = I$  et  $g(I) = B$  . Montrer que  $g$  est une symétrie glissante , donner sa forme réduite puis construire  $\Omega' = g(\Omega)$  .  
b) On pose  $h = T_{\vec{IA}} \circ g$ , déterminer  $h(\Omega)$  et  $h(A)$  . Caractériser  $h$
- 4) Pour tout point  $M$  du plan , on note  $M' = f(M)$  et  $M'' = g(M)$  . Montrer que  $M'$  et  $M''$  sont symétriques par rapport à une droite que l'on précisera.

Nom et Prénom : .....



Exercice 5 :



Exercice 5 :