

Lycée Boulbaba Gabés	Devoir de synthèse n°1	M ^{rs} : BOURAOUI+AZAIEZ+NAGBI
Classe: 4 M	Durée : 3 ^H	A S : 2012- 2013

Exercice n°1 (3pts)

On donne ci-contre la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $]-\infty, 4]$. La droite $\Delta : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 passe par le point $A(-1, -1)$.

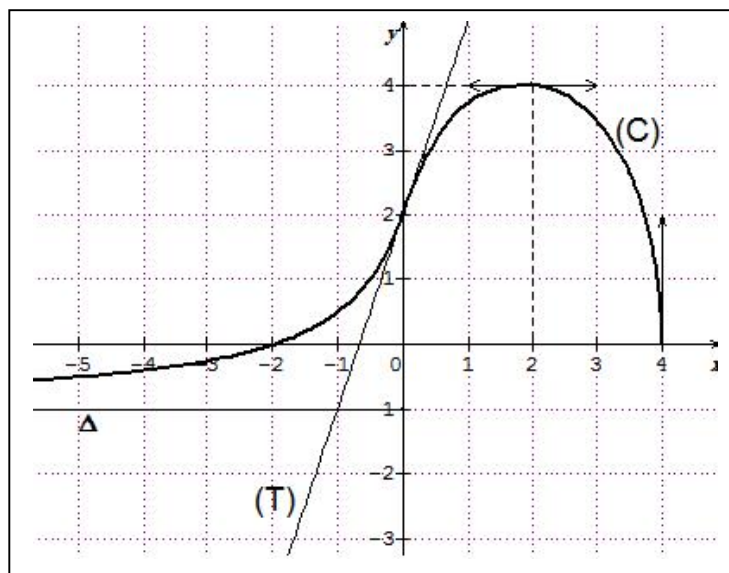
Répondre en utilisant le graphique.

1°) Donner une équation de la tangente (T)

2°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x)}{x-4}$.

3°) Déterminer $(f \circ f)'(0)$.

4°) Justifier l'existence d'un point de (C) d'abscisse comprise entre 0 et 2 où la tangente à (C) est parallèle à la droite d'équation $y = x$.



Exercice n°2 (5pts)

On considère dans le plan orienté un losange ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{f}{3} [2f]$

1°) a) Montrer que si f est une isométrie qui laisse globalement invariant le losange ABCD alors f fixe le point O.

b) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD.

2°) a) Donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes :

$$f_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \quad \text{et} \quad f_2 = S_{(CD)} \circ S_{(CA)}$$

b) Caractériser alors l'isométrie $g = r_{(C, -\frac{f}{3})} \circ r_{(A, \frac{f}{3})}$.

3°) On note E, F, et G les symétriques respectifs des points A, D et C par rapport au point B. Soit h l'isométrie telle que : $h(A) = E$, $h(B) = F$ et $h(D) = B$.

a) Montrer que h n'admet aucun point fixe.

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que $S_{(BD)} \circ h = t_{\overline{DB}}$.

d) Donner alors l'axe et le vecteur de h .

Exercice n°3 (5,5 pts)

On donne l'équation (E) : $z^2 - (1+i)e^i \cdot z + ie^{2i} = 0$ avec $r \in [0, 2]$

A) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

B) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \bar{U}, \bar{V}) ,

on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 avec $z_1 = e^i$ et $z_2 = ie^i$

1°) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle

2°) On pose $Z = z_1 + z_2$

a) Donner le module et un argument de Z

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5f}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5f}{12}\right)$

c) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$

i) Montrer que lorsque r varie dans $[0, 2f]$ le point I décrit un cercle (C) que l'on précisera

ii) Montrer que (M_1M_2) est tangente à (C)

3°) On suppose que $r \in [0, f]$

a) Montrer que $\left(\bar{U}, \widehat{M_1M_2}\right) \equiv r + \frac{3f}{4} [2f]$

b) En déduire la valeur de r pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe (O, \bar{V})

c) Placer dans l'annexe (II) les points M_1 et M_2 pour la valeur trouvée de r

d) Soit A le point d'affixe $z_A = 1+i$, calculer l'aire du triangle AM_1M_2

Exercice n°4 (6,5 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3x}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, \bar{i}, \bar{j})

1°) Montrer que la droite $D : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C) dans l'annexe (I).

3°) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} .

c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4°) Soit U la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq 1$.

b) On a tracé dans l'annexe (I) la courbe (Γ) de la dérivée seconde de f .

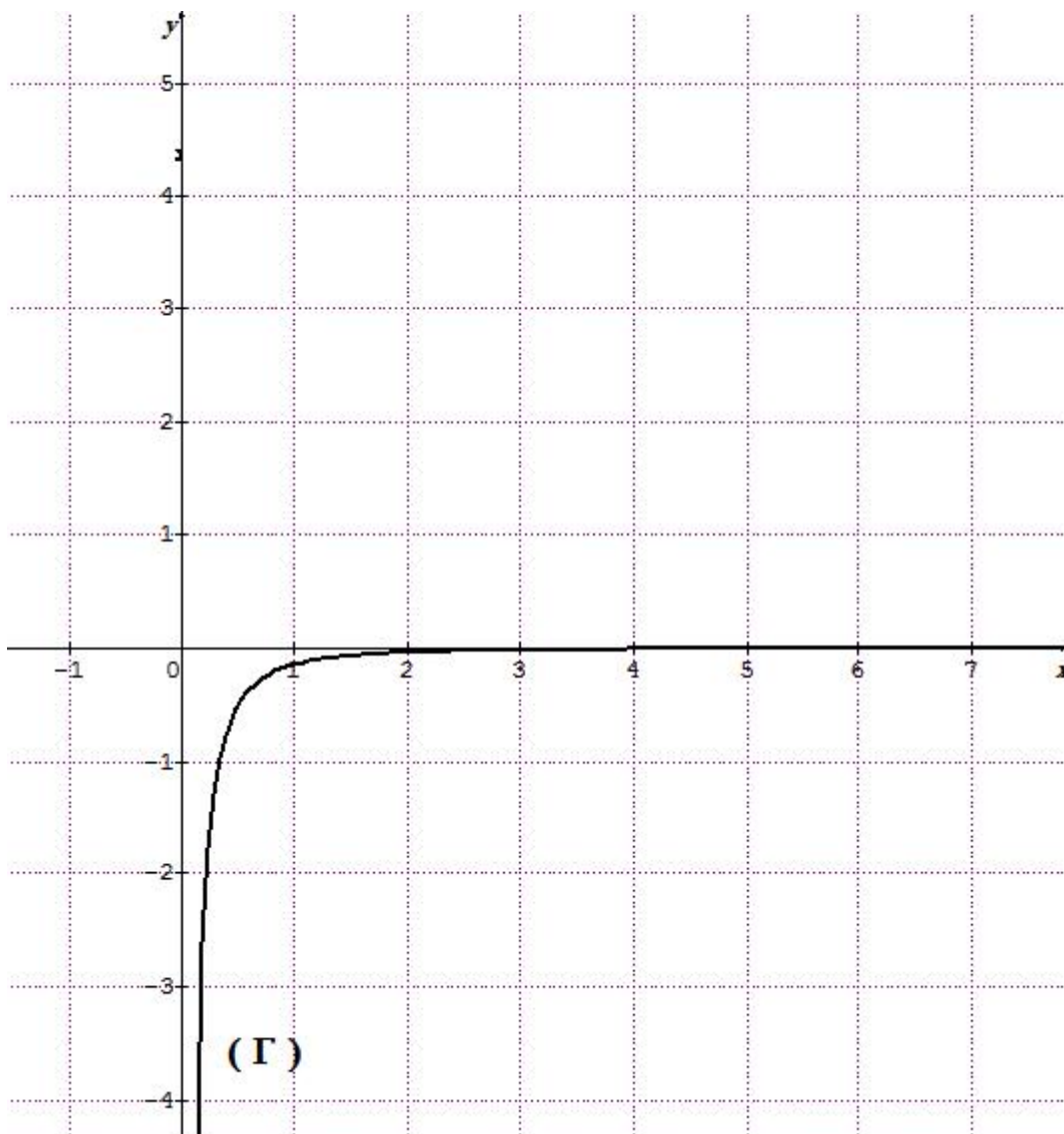
En s'aidant de la courbe (Γ) , montrer que pour tout réel $x \geq 1$, on a : $f'(x) \leq \frac{5}{8}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{5}{8}|U_n - 1|$ et que $|U_n - 1| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

d) Déterminer alors la limite de U .

Nom et prénom :

Annexe (I)



Annexe (II)

